Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Teoría de Representaciones
Año 2022

Repartido 1: Generalidades

1. Consideremos el grupo diedral $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}, r^3 = s^2 = rsrs = e$ (isometrías del triángulo)

   a) Se consideran las $\mathbb{k}$-representaciones de grado 3 y 2 respectivamente definidas por

   - $$r.(x, y, z) = (z, x, y), s.(x, y, z) = (x, z, y)$$

     y

     $$r(x, y) = \left(-\frac{x + \sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x - y}{2}\right), s(x, y) = (x, -y).$$

   Chequear que efectivamente las igualdades de arriba definen $\mathbb{k}$-representaciones de D_3, que llamaremos respectivamente V y W.

   b) Probar que $f : \mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x - \frac{1}{2}(y + z), \frac{\sqrt{3}}{2}(y - z))$ es un epimorfismo de representaciones de V en W.

   c) Probar que que W es irreducible.

   d) Hallar el núcleo de f.

2. Sean G un grupo finito, V una $\mathbb{C}$-representación de G y $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ un producto interno. Decimos que es G-invariante si $\langle gv, gw\rangle = \langle v, w\rangle$.

   a) Probar que dado un producto interno $\langle , \rangle$ cualquiera, la operación: $[,] : V \times V \to \mathbb{C}$ definida por $[v, w] = \sum_{g\in G}\langle gv, gw\rangle$ es un producto interno G-invariante.

   b) Deducir de otra manera a la probada en clase, que toda $\mathbb{C}$-subrepresentación de G tiene un complemento directo.

   c) Probar que si se toma una base ortonormal de V respecto a un producto interno G-invariante, la matriz $r(g)$ asociada a $g \cdot \_ : V \to V$ en dicha base es unitaria, es decir verifica $r(g)^{-1} = \overline{r^t(g)}$.

3. Consideremos el grupo cíclico $C_2 = \{e, s\}$ con $s^2 = e$. Supongamos que $char k = 2$.

   a) Probar que $s(x, y) = (y, x)$ define una $\mathbb{k}$-representación no trivial de C_2, de grado 2, que llamaremos V.

b) Probar que V tiene una única subrepresentación de grado 1.

c) Deducir que no se verifica el Teorema de Maschke en el contexto general.

4. a) Probar que las representaciones de grado 1 son constantes en las clases de conjugación.

   b) Probar que cada grupo de permutaciones S_n tiene exactamente 2 representaciones de grado 1 no isomorfas.

5. Sean V una $\mathbb{k}$-representación de G y $n \in \mathbb{N}$. Probar que la suma directa de n copias de V es isomorfa a $V \otimes \mathbb{k}^n$, donde se considera $\mathbb{k}^n$ munido de la representación trivial.

6. Probar que si (V, ρ) es una $\mathbb{k}$-representación irreducible de G, entonces:

   - $\rho(G) \subseteq Aut(V)$ es un subgrupo
   - si ι es la inclusión anterior, entonces (V, ι) es una $\mathbb{k}$-representación irreducible de $\rho(G)$.

7. Probar que si G,H son grupos todo morfismo sobreyectivo $f : G \to H$ permite construir representaciones irreducibles de G a partir de representaciones irreducibles de H.

8. Se considera el espacio vectorial $V = \frac{\mathbb{k}^4}{[(1,1,1,1)]}$ sobre el que actúa el grupo de permutaciones S_4 de la siguiente manera:

$$\sigma \cdot \overline{e_i} = \overline{e_{\sigma(i)}}, \forall \sigma \in S_4,$$

   donde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es la base canónica de $\mathbb{k}^4$.

   a) Probar que la operación definida arriba es efectivamente una acción de G sobre V. Notaremos a la representación inducida M_4.

   b) Probar que M_4 no tiene subrepresentaciones de grado 1.

   c) Sea $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

      1) Probar que M_4 es irreducible.

      2) Sea M_2 la representación de grado 1 no trivial de S_4. Probar que $M_2 \otimes M_4$ es una representación de S_4 irreducible y no isomorfa a M_4.

   d) Probar que si $char\mathbb{k} = 2$, entonces M_4 no es irreducible.

9. Consideremos las particiones en conjuntos de cardinal 2 del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, que llamaremos A, B y C.
   Para cada $\sigma \in S_4$, se define la función $\pi(\sigma) : \{A, B, C\} \to \{A, B, C\}$ mediante $\pi(\sigma)(X) = \{\sigma(x) : x \in X\}$.

   a) Observar que $\pi(\sigma)$ es una biyección.

b) Probar que la construcción anterior induce un morfismo de grupos sobreyectivo $\pi : S_4 \to S_3$.

c) Deducir un ejemplo de representación irreducible de S_4 de grado 2 sobre $\mathbb{C}$.

10. Sea V el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}$ con soporte finito.

    a) Probar que $\{\delta_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ es una base de V, siendo $\delta_i \in V$ definida por $\delta_i(j) = \delta_{i,j}$ (la delta de Kronecker).

    b) Definimos una transformación lineal $S : V \to V$ mediante $S(\delta_i) = \delta_{i+1}$. Probar que $n \cdot f = S^n(f)$ define una representación de $\mathbb{Z}$ sobre V y que S resulta un (iso)morfismo de representaciones.

    c) Probar que S no tiene vectores propios.

    d) Sea V_f la subrepresentación de V generada por f y sea $g = f + S(f)$. Probar que $0 \neq V_g \subsetneq V_f$.

    e) Deducir que V no tiene subrepresentaciones irreducibles.

11. Probar que si G es finito, toda representación de dimensión infinita tiene una subrepresentación propia. Probar que si G es numerable, toda representación de dimensión no numerable tiene una subrepresentación propia.

12. Se considera el producto tensorial $V \otimes V$, donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo cualquiera, equipado con la transformación lineal $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ definida por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$.

    a) Sean $Sym^2(V) = \{z \in V \otimes V \mid \tau(z) = z\}$ y $Alt^2(V) = \{z \in V \otimes V \mid \tau(z) = -z\}$.Probar que $\{e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i \mid i \leq j\}$ y $\{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i \mid i < j\}$ son respectivamente bases de $Sym^2(V)$ y $Alt^2(V)$.

    b) Probar que
    $$V \otimes V = Sym^2(V) \bigoplus Alt^2(V).$$

    c) Observar que toda representación ρ sobre V hace de $Sym^2(V)$ y $Alt^2(V)$ subrepresentaciones de $V \otimes V$ que denotaremos σ y α.