Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Teoría de Representaciones
Año 2022

Repartido 2: Caracteres

Aquí G es finito, $\Bbbk = \mathbb{C}$ y las representaciones son de dimensión finita.

1. Probar que si (V, ρ) y (W, τ) son G-representaciones, entonces $dimHom_G(V, W) = \langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle$.

2. Probar que si χ_ρ y χ_τ son caracteres irreducibles de G, se tiene

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \chi_\rho(hg)\chi_\tau(g^{-1}) = \begin{cases} \frac{\chi_\rho(h)}{\chi_\rho(e)} & \text{si } \chi_\rho = \chi_\tau, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   Observar que la igualdad de arriba para $h = e$ corresponde a la ortogonalidad de los caracteres irreducibles.

3. Hallar la tabla de caracteres de S_4.

4. Sea (V, ρ) una representación tal que $\chi_\rho(g) = 0.\forall g \neq e$. Probar que para cierto natural n se tiene $(V, \rho) \cong (\mathbb{C}G, r)^{(n)}$.

5.
   a) Hallar la tabla de caracteres del grupo de los cuaterniones $Q = \{e, -e, i, -i, j, -j, k, -k\}$, donde e es el neutro, multipilcar por $-e$ a izquierda o a derecha cambia el signo, $ij = k, jk = i, ki = j$, $ji = -k, kj = -i, ik = -j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -e$.

   b) Hallar la tabla de caracteres del grupo diedral D_4.

   c) Deducir que dos subgrupos no isomorfos pueden tener la misma tabla de caracteres.

6.
   a) Probar que $\chi_{\rho\otimes\tau} = \chi_\rho.\chi_\tau$, para ρ, τ representaciones de un mismo grupo G.

   b) Averiguar si el producto tensorial de representaciones irreducibles es irreducible.

7. Se considera el producto tensorial $V \otimes V$, donde V es un espacio vectorial sobre un cuerpo cualquiera, equipado con la transformación lineal $\tau : V \otimes V \to V \otimes V$ definida por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$. Se consideran las subrepresentaciones $Sym^2(V)$ y $Alt^2(V)$ definidas en el Repartido 1. Para cada representación en V de carácter χ, notamos χ_σ y χ_α a los caracteres respectivos de las subrepresentaciones $Sym^2(V)$ y $Alt^2(V)$.

a) Probar que para cada $g \in G$ se tiene

$$\chi_\sigma(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho(g^2)\right)$$

y que

$$\chi_\alpha(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho(g^2)\right).$$

b) Sean V_1, V_2 espacio vectoriales. Se consideran representaciones ρ_1, ρ_2 sobre V_1, V_2 respectivamente, y sea $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ su suma directa como representación sobre V. Probar que se tiene:

$$\chi_\sigma = (\chi_1)_\sigma + (\chi_2)_\sigma + \chi_1\chi_2$$

y

$$\chi_\alpha = (\chi_1)_\alpha + (\chi_2)_\alpha + \chi_1\chi_2,$$

siendo χ_1, χ_2 los caracteres respectivos de $(V_{,1}, \rho_1) y (V_2, \rho_2)$ y χ el carácter de $(V_1 \otimes V_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$.

8. Hallar la tabla de caracteres del grupo alternado A_4.