Clase 1
18/8/2022

Lecture 1:

(1) $b = Ax \implies \underline{b}$ es una combinación lineal de columnas de A.

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $A = ((a_{ij})) = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n}\Big\}m$ $(A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m)$ op. lineal.

$b \in \mathbb{C}^m$, ~~$Ax = b$~~ $\implies b = Ax = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ $A = (\vec{a}_1 | \cdots | \vec{a}_n)$ $[\vec{a}_1 | \cdots | \vec{a}_n] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\to x \in \mathbb{C}^n$ actúa on A (opera)

<u>Ejemplo</u>: (Matriz de Vandermonde)

$\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) = \{$polinomios de grado $\leq n\} \cong \mathbb{C}^n$ $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$ $\to (c_0, \ldots, c_{n-1})$

Fijados $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{C}$ m puntos.

$p \in \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \xrightarrow{Eval} \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ mapa lineal.

A matriz que representa esta transf. lineal es $A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{n-1} \end{pmatrix}$

$(A \cdot c)_i = c_0 + c_1x_i + c_2x_i^2 + \cdots + c_{n-1}x_i^{n-1} = p(x_i)$

En particular, si $m = 1$, $\{x\}$.

$Eval_x : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ $Eval_x(p) = (1, x, \ldots, x^{n-1}) \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$

Ejemplo (Matrices de Rango 1) ~ Producto tensorial

$$u v^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} (v_1 - v_n) = \left(v_1 \vec{u} \,|\, - \,|\, v_n \vec{u} \right) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & - & u_1 v_n \\ \vdots & & \\ u_m v_1 & & u_m v_n \end{pmatrix}$$

$u \otimes v$; $\uparrow \vec{u}$; $\downarrow v^T$

$$\left(\sum u_i e_i \right) \otimes \left(\sum_j v_j f_j \right) = \sum u_i v_j \, e_i \otimes f_j$$

¿Cuál es el rango? (1) ¿Cuál es la imagen? $\langle \vec{u} \rangle$ ¿cuál es el núcleo? $v^\perp = \{ z \in \mathbb{C}^n : v_1 z_1 + \dots + v_n z_n = 0 \}$

Ejemplo: $B = A \cdot R$ $\quad (b_1 | - | b_n) = [a_1 | - | a_n] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & & \\ | & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

de donde resulta
$b_1 = a_1$
$b_2 = a_1 + a_2$
$b_i = a_1 + \dots + a_i$.

Popurri: Imagen o rango, ~~núcleo~~, rango máximo, núcleo

• Inversa: $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, tq $A \cdot B = Id_m$ $\quad B = A^{-1}$
$B \cdot A =$

$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m$ y se puede escribir como comb. lineal de columnas de A $\Longrightarrow$ $e_j = z_{1j} \vec{a}_1 + \dots + z_{mj} \vec{a}_m$ $\quad A \cdot Z = (e_1 | - | e_m) = Id_m$

$e_j = A \begin{pmatrix} z_{1j} \\ \vdots \\ z_{mj} \end{pmatrix}$ $\quad \Longrightarrow Z = ((z_{ij})) = A^{-1}$.

¿Qué significa $x = A^{-1} \cdot b$?

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \Longrightarrow$ coord(x) son las componentes del vector b en la base $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ (expresión única)

i.e. $Ax = b \rightarrow \underline{b = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_m}$.

i.e. **Multiplicar por A^{-1} es un cambio de base**

$$\begin{array}{ccc} b: & \xrightarrow{A^{-1}} & A^{-1}\cdot b: \\ \text{coord de } b & & \text{coord de } \underline{b} \\ \text{en base canónica} & \xleftarrow[A]{} & \text{en base } \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} \end{array}$$

(un poco ambiguo pero se entiende)

$\left(b_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow b_1 = x_1\vec{a}_1 + \dots x_n \vec{a}_n \right)$

Matrices Ortogonales

$z = x + iy \in \mathbb{C} \rightsquigarrow \overline{z} = x - iy \in \mathbb{C}$.

$A \in \mathbb{C}^{m\times m} \longrightarrow A^* = ((\overline{a_{ji}})) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ (caso real A^T)

$A = ((a_{ij}))$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{31}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{32}} \end{pmatrix}$

- $A = A^*$ matriz Hermitiana.

$\langle y, x \rangle$

Producto Interno $\quad x, y \in \mathbb{C}^m \qquad \overset{\shortparallel}{x^* y} = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i y_i$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad \|x\| = \sqrt{x^* x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2}$

(→ El p.i. es bilineal: $(\alpha x)^* \beta y = \bar{\alpha}\beta\, x^* y$)

- $\underline{\underline{x}}$ es ortogonal a $\underline{\underline{y}}$ si $x^* y = 0$ $\quad (x \perp y)$

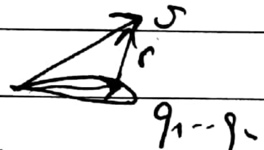
- Componentes (ortog.) de un vector $\qquad (m \geq n)$

$\{q_1, \dots, q_n\}$ ortonormal, v vector arbitrario (todo en $\mathbb{C}^m$)

$q_j^* v$ es un escalar (comp. de v en dirección de q_j)

$$r = v - (q_1^* v) q_1 - \cdots - (q_n^* v) q_n$$

$$\Rightarrow r \perp \{q_1 \dots q_n\}$$



$$\Rightarrow v = r + \sum_{i=1}^{n} (q_i^* v) q_i = r + \sum_{i=1}^{n} (q_i q_i^*) v$$

↳ mat. rango 1.
proyección ⊥ en q_i

Si $m = n$ (i.e. $\{q_1 \dots q_n\}$ bon) $\Rightarrow$

$$v = \sum (q_i^* v) q_i = \sum (q_i q_i^*) v$$

↓
proy. ortog. en q_i

◦ Matrices Unitarias (Ortogonales).

$Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitaria si $Q^*Q = I_m$ $\left(Q^* = Q^{-1} \right)$

$Q = (q_1|\dots|q_m)$ $\qquad \begin{pmatrix} q_1^* \\ \vdots \\ q_m^* \end{pmatrix}(q_1|\dots|q_m) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

i.e. $q_i^* q_j = \delta_{ij}$ $\quad \{q_1,\dots,q_m\}$ bon. de $\mathbb{C}^m$

Observa $(Qx)^*Qy = x^*Q^*Qy = x^*y$ $\quad \left(\langle Qy, Qx\rangle = \langle \overset{I_m}{Q^*Q}\, y, x\rangle \right)$
y en particular $\|Qx\| = \|x\|$.

Análogo a lo anterior. Si quiero hallar componentes de un vector b en coordenadas en base $\{q_1,\dots,q_m\}$ basta calcular Q^*b.

Ejercicios: