CLASE 2 ALN
23/8/2022

Normas en Espacios de Matrices

Dada $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, y normas $\|\cdot\|_m$ en $\mathbb{C}^m$, y $\|\cdot\|_n$ en $\mathbb{C}^n$ podemos definir la norma de operador asociada como

$$\|A\|_{(m,n)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ \|x\|_n=1}} \|Ax\|_m$$

~~o equivalente~~ En particular se tiene $\|Ax\|_m \leq \|A\|_{(m,n)} \|x\|_n$.

Es fácil ver que $\|\cdot\|_{(m,n)}$ es de hecho una norma sobre el espacio $\mathbb{C}^{m\times n}$. Además, satisface (en el caso $m=n$) la propiedad submultiplicativa
↳ e igual normas. $\|A\cdot B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$
(De hecho se puede extender a operadores $\mathbb{C}^n \xrightarrow{B} \mathbb{C}^m \xrightarrow{A} \mathbb{C}^k$.)

Ejemplos 1. $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, con $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ (en $\mathbb{C}^n$), $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i|$ (en $\mathbb{C}^m$)

$$\Rightarrow \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max_{1\leq j\leq n} \|a_j\|_1$$
↳ columnas.

2. $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ con $\|\cdot\|_\infty$ en ambos espacios ($\|z\|_\infty = \max |z_i|$) resulta

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_{1\leq i\leq m} \|a_{i\cdot}\|_1$$
↳ filas.

Queda como ejercicio probar lo anterior

3. ~~N~~orma de operador clásica (o norma espectral)

Cuando tomamos la norma Euclídea en ambos espacios tenemos

$$\|A\|_2 = \|A\|_{op} = \|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

siendo $\|z\|_2^2 = \sum |z_i|^2$.

En particular, si $A = a^* \in \mathbb{C}^{1\times n}$ es un vector fila resulta $\|A\|_2 = \|a^*\|_2 = \|a\|_2$ es la norma Euclídea del vector fila.

4. Norma de Frobenius (o Hilbert-Schmidt)

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Esta norma no es inducida como las normas anteriores, y de hecho es una norma inducida por un producto interno, a saber

$$\langle A, B\rangle_F := tr(B^*A) = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \overline{b_{ij}}$$

donde $\|A\|_F^2 = tr(A^*A) = tr(AA^*)$

Propiedades: a) $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p} \Rightarrow \|A\cdot B\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$

b) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\, \|A\|_2$

c) Invariancia Unitaria: $\|QA\|_F = \|A\|_F$, $\|AV\|_F = \|A\|_F$ siendo $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitaria, $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria.

Dem: a) Probemos algo más fuerte, $\|AB\|_F \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_F$:

$B = (B_1 | \cdots | B_p)$

Esto resulta de que

$$\|AB\|_F^2 = \sum_{j=1}^{p} \|Ab_j\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{p} \|A\|_2^2 \cdot \|b_j\|_2^2 = \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_F^2 .$$

luego basta probar b).

b) $$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|^2 \overset{\text{desigualdad triangular}}{\leq} \max_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \|a_j\|_2 \right)^2 \overset{\text{Cauchy Schwartz}}{\leq} \left(\sum |x_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \|a_j\|_2^2 \right) = \|A\|_F^2 .$$

Cauchy Schwartz: $\sum \alpha_j \beta_j \leq \left(\sum \alpha_j^2\right)^{1/2} \left(\sum \beta_j^2\right)^{1/2}$ o $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Por otro lado sabemos $\|a_j\|_2 = \|A e_j\|_2 \leq \|A\|_2$ $(j = 1 - n)$

Luego $$\|A\|_F^2 = \sum_{j=1}^{n} \|a_j\|^2 \leq n \cdot \|A\|_2^2 \Longrightarrow \|A\|_F \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2 .$$

c) Resulta $$\|QA\|_F^2 = tr((QA)^* QA) = tr(A^* \underbrace{Q^* Q}_{Id_m} A) = tr(A^* A) = \|A\|_F^2$$

En el otro sentido tenemos $$\|AV\|_F^2 = tr((AV)(AV)^*) = tr(A \overbrace{V V^*}^{Id_n} A^*) = tr(AA^*) = \|A\|_F^2 .$$

(o de manera alternativa, $\|AV\|_F^2 = tr((AV)^* AV) = tr(V^* A^* A V)$, y como $V^* = V^{-1}$ podemos usar la propiedad de invariancia de la traza por conjugaciones.)

Comentario: La norma espectral también satisface la invariancia.

$$\|QA\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|QAx\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \|A\|_2$$

$$\|AV\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|AVx\| \overset{(*)}{=} \max_{\|y\|_2=1} \|Ay\| = \|A\|_2$$

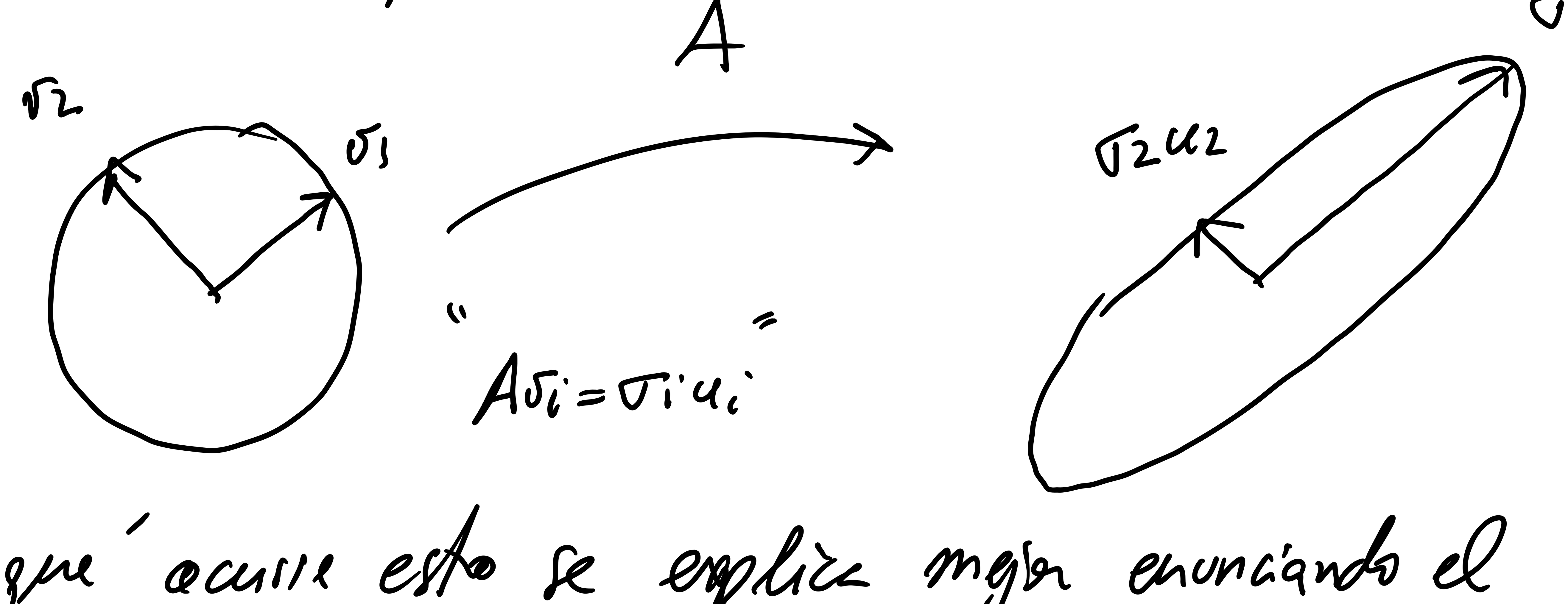
(*) Acá usamos que la transformación lineal $V: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mapea biyectivamente la bola unidad (o la esfera) en sí misma.

Comentario: La invarianza $\|QA\|_2 = \|A\|_2$ y $\|QA\|_F = \|A\|_F$ con $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitaria ($Q \in \mathcal{U}(m)$) también es válida para $Q \in \mathbb{C}^{p\times m}$ con $p > m$, $Q = \left[q_1 | \cdots | q_m \right]$ con $\{q_i\}$ con columnas ortogonales. (Ejercicio).

DESCOMPOSICIÓN en VALORES SINGULARES (SVD)

La SVD es una factorización fundamental de una matriz, y muchas propiedades geométricas de una matriz se hacen evidentes si utilizamos esta factorización.

Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ (i.e. $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ op. lineal), entonces A manda la esfera unidad de $\mathbb{C}^n$ en un "elipsoide" con la propiedad que hay una b.o.n en el dominio que es ~~esta~~ enviada a los ejes ppales. del elipsoide



El por qué ocurre esto se explica mejor enunciando el resultado de SVD.

Teorema: Toda matriz $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ de rango r, existen $U\in\mathcal{U}(n)$ y $V\in\mathcal{U}(m)$ (matrices unitarias), y una matriz $\Sigma\in\mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$A=V\Sigma U^*, \quad \text{con } \Sigma=\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix},\ D\in\mathbb{R}^{r\times r} \text{ diagonal}$$

donde $D=\operatorname{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$

$\sigma_1\geq\dots\geq\sigma_r>0$ son los valores singulares.

Dem: Como la matriz $A^*A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana, utilizando el teorema espectral tenemos que $\exists\, U\in\mathcal{U}(n)$ tq.

$$U^*A^*AU=\begin{pmatrix}\sigma_1^2&&&&\\&\ddots&&&\\&&\sigma_r^2&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\ 0\end{pmatrix}.$$

Escribiendo $U=(u_1|\dots|u_n)$ ($\{u_i\}$ b.o.n de $\mathbb{C}^n$), y observando que $(AU)^*(AU)$ es diagonal, tenemos que los vectores Au_i, $i=1,\dots,n$ son dos a dos ortogonales, y $\|Au_i\|=\sigma_i$, $i=1,\dots,r$, y $Au_i=0$, si $i=r+1,\dots,n$.

Luego definiendo $v_i:=\dfrac{Au_i}{\sigma_i}$ $\quad i=1,\dots,r$

y luego completando a una b.o.n de $\mathbb{C}^m$, obtenemos que

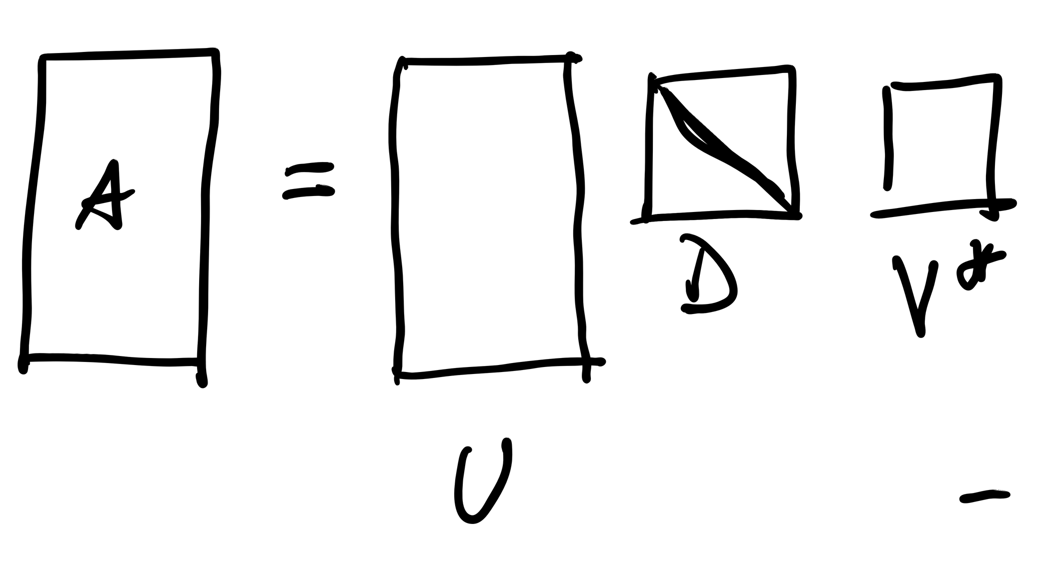
$$A\cdot U=V\cdot\Sigma:\quad Au_i=\sigma_i v_i \quad i=1,\dots,r.\quad Au_j=0v_j \quad j=r+1,\dots,m$$

$$A\cdot(u_1|\dots|u_n)=(v_1|\dots|v_m)\cdot\left(\begin{array}{c|c}\sigma_1\ \ddots\ \sigma_r&0\\ \hline 0&0\end{array}\right)\qquad\square$$

SVD Reducida: De la prueba se puede reducir a

$$[A](v_1|\dots|v_r)=(u_1|\dots|u_r)\begin{pmatrix}\sigma_1&&\\&\ddots&\\&&\sigma_r\end{pmatrix}$$

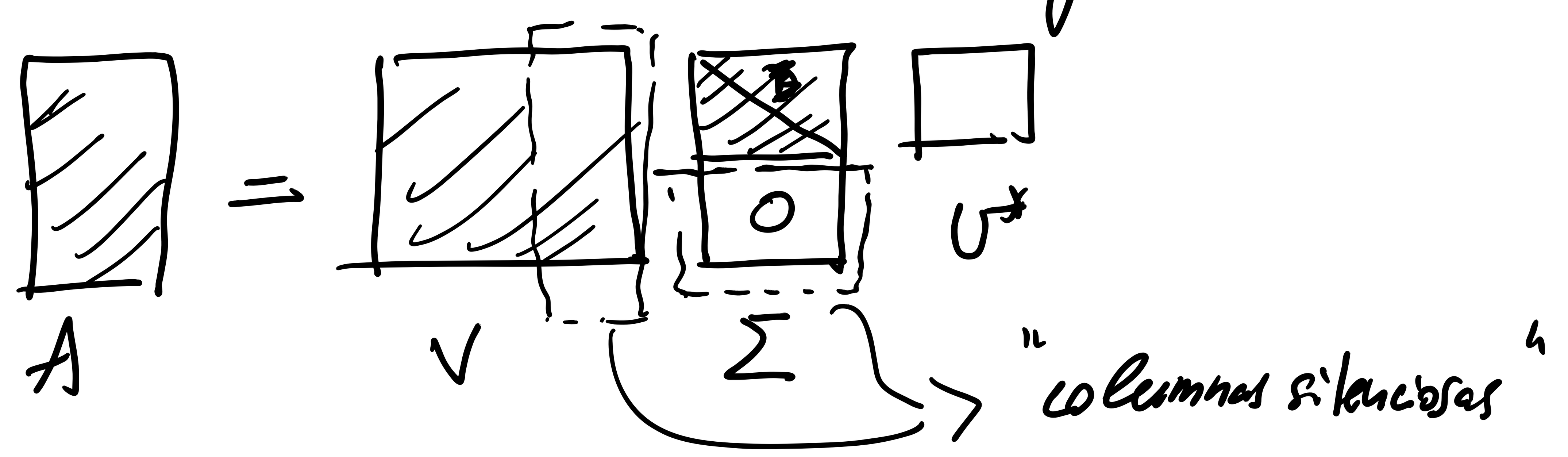
$Av_i=\sigma_i u_i \quad i=1,\dots,r.$



Full SVD: Es tal cual el enunciado del teorema. $(m \geq n)$

Por ejemplo si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ es de rango máximo i.e. n

entonces tenemos



Unicidad? En general, no, por ejemplo $I_d = U I_d U^*$ para cualquier unitaria.

Comentarios: 1) Si $\sigma_i \neq \sigma_j$ entonces u_i, v_i $(i=1 \dots r)$ son únicos a menos de complejos de módulo 1.

2) Si A es real $(A \in \mathbb{R}^{m\times n})$ entonces U y V son ortogonales.

3). Los valores singulares son la raíz cuadrada de los valores propios de A^*A.

4) A manda la esfera unidad en el ortogonal al núcleo de A en un elipsoide de ejes v_i $(i=1,\dots,r)$ y largo σ_i:

$x \in \ker A^{\perp} =$ generado$\{u_1, \dots, u_r\}$, $x = x_1 u_1 + \dots + x_r u_r$

con $\sum_{i=1}^{r} |x_i|^2 = 1$, $\Longrightarrow$ $Ax = \sigma_1 x_1 v_1 + \dots + \sigma_r x_r v_r$ donde

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{|\sigma_i x_i|^2}{\sigma_i^2} = 1$$

$$\max_{\|x\|=1} \langle A^*Ax, x\rangle = \max_{\|x\|=1} \langle Dx, x\rangle = \sigma_1^2$$

5). Observar que $\|Ax\|^2 = \langle A^*Ax, x\rangle$ luego $\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|=1} \langle A^*Ax, x\rangle$ de donde resulta $\|A\|^2 = \sigma_1^2$ y por lo tanto $\|A\| = \sigma_1$.

Si $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ invertible de manera análoga se prueba $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_m}$.