Ensemble Microcanónico

Mecánica Estadística (2022)

Práctico 2

1. Considere un gas ideal compuesto por N partículas moviéndose aleatoriamente en un volumen V. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar exactamente N' partículas dentro de un sub-volumen V' contenido en V?

2. Retomando el último ejercicio del práctico pasado.

   a) Halle el número de estados accesibles a un gas ideal monoatómico aislado con energía menor que E.

      1) Determine, entonces, la entropía de un sistema que tiene energía E con una incertidumbre Δ.

      2) Halle la temperatura del sistema y, posteriormente, determine la ecuación de estado: $PV = Nk_BT$.

   b) Repita para el gas ultra-relativista.

3. Cuando una partícula de spin 1/2 se coloca en un campo magnético externo H, su energía se desdobla en $-\mu H$ y $+\mu H$ correspondientes a momento magnético μ y $-\mu$ según el sentido del campo magnético, respectivamente. Suponga un sistema de N de tales partículas idénticas pero distinguibles, aislado, en un campo magnético externo H. Calcule:

   a) La energía total E como función de N y del número n de partículas con momento magnético μ paralelo a H.

   b) Considere el rango de energías entre E y $E + \delta E$, siendo $\delta E \ll E$ pero microscópicamente grande de modo que $\delta E \gg \mu H$. Obtenga el número de estados energéticos $\Omega(E)$ en ese rango de energías.

4. Considere la dependencia del número de estados accesibles con la energía para partículas libres. Sea $\Phi(E)$ el número de estados con energía menor que E, y $\Omega(E)$ el número de estados por unidad de energía, a energía E ($\Omega(E) = d\Phi(E)/dE$).

   a) Para una partícula en una caja cúbica de volumen $V = L^3$ con energía grande E. Calcule las dos funciones anteriores.

   b) Calcule el número de estados entre E y $E + \Delta$ para un átomo de hierro en una caja de $10\,cm$ de lado a $300\,K$, siendo $E = (3k_BT)/2$ y $\Delta = E/100$.

c) Calcule, para partículas en una caja, la dependencia de $\Phi(E)$ con la energía total, el número de partículas y el volumen.

Dato: el volumen de una esfera de N dimensiones y radio R es

$$V_N = \frac{\pi^{N/2} R^N}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)},$$

donde Γ es la función Γ de Euler.

d) Con los valores de la parte 4*b* calcule $\Phi(E+\Delta)/\Phi(E)$ para $N = 10^{23}$.

5. Considere un gas de N partículas distribuidas en N_0 celdas con $N \leq N_0$. Suponga que cada celda puede estar vacía u ocupada por una única partícula y que cada celda tiene un volumen v_0 fijo de forma que el volumen total del sistema es $V = v_0 N_0$.

   a) Calcule la entropía por partícula $s = s(v)$ con $v = V/N$.

   b) Obtenga una expresión para la ecuación de estado p/T en términos de la densidad $\rho = 1/v$.

   c) Muestre que en el límite $N \ll N_0$ el primer término de esa expansión es la ley de Boyle de los gases ideales.

   d) Grafique cualitativamente μ/T, donde μ es el potencial químico, en función de la densidad. ¿Cuál es el comportamiento del potencial químico en los límites $\rho \to 0$ y $\rho \to 1$?

6. *a*) Para un conjunto de N osciladores armónicos tridimensionales clásicos de frecuencia ω y energía total entre E, calcule la entropía S y la temperatura T.

   b) Repita para un conjunto de N osciladores armónicos tridimensionales cuánticos y muestre que para altas temperaturas, $k_B T \gg h\omega$ se recuperan los resultados clásicos.

   c) A partir de las expresiones de la entropía S y la temperatura T encontradas en la parte 6*b*, resuelva para E y obténgala en función de N y T.

7. El Hamiltoniano de espines de un sistema de iones magnéticos localizados está dado por:

$$H = D \sum_{j=1}^{N} S_j^2,$$

donde $D > 0$ y las variables S_j de espín pueden tomar valores ± 1 o 0 para cada j. Este Hamiltoniano describe el efecto de un ambiente electrostático en iones de espín 1. Un ion en estado ± 1 tiene energía D y un ion en estado 0 tiene energía 0.

   a) Mostrar que el número de estados accesibles al sistema con energía total E puede escribirse como:

$$\Omega(E,N) = \frac{N!}{(N-\frac{E}{D})!} \sum_{n_-=0}^{\frac{E}{D}} \frac{1}{(\frac{E}{D}-n_-)!\,n_-!}.$$

b) Muestre entonces que:

$$\Omega(E,N) = \frac{N!2^{E/D}}{(N-\frac{E}{D})!(\frac{E}{D})!}.$$

c) Usando la fórmula de Stirling muestre que en el límite $N, E \to \infty$ con E/N fijo:

$$\frac{1}{N}Ln(\Omega) \to \frac{E}{ND}Ln(2) - \left(1-\frac{E}{ND}\right)Ln\left(1-\frac{E}{ND}\right) - \frac{E}{ND}Ln\left(\frac{E}{ND}\right).$$

Esta última expresión es la entropía por partícula en unidades de k_B.

8. Considere dos sistemas de espines A y A' colocados en un campo externo H. El sistema A está formado por N partículas localizadas, débilmente interactivas, de espín $1/2$ y momento magnético μ_0. De igual forma el sistema A' está formado por N' partículas localizadas, débilmente interactivas, de espín $1/2$ y momento magnético μ_0'. Los dos sistemas están inicialmente aislados, con energías totales respectivas $b\mu_0 NH$ y $b'\mu_0' N'H'$. Se ponen en contacto térmico mutuo. Se supone $|b| \ll 1$ y $|b'| \ll 1$.

   a) Calcule el número de estados accesibles de cada sistema (utilice la aproximación de Stirling y expréselo como una Gaussiana).

   b) En la situación más probable correspondiente al equilibrio térmico final, ¿cómo es la energía $\tilde{E}$ del sistema A respecto a la energía $\tilde{E}'$ del sistema A'?

   c) ¿cuál es el valor $\tilde{E}$ de energía del sistema A?

   d) ¿cuál es el calor Q absorbido por el sistema A al pasar de la situación inicial a la final?

   e) ¿cuál es la probabilidad $P(E)dE$ de que A tenga su energía final en el intervalo E y $E + dE$?

   f) ¿cuál es el valor de la dispersión $\Delta^* E = \sqrt{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}$ de la energía del sistema A en la situación final de equilibrio?

   g) ¿cuál es el valor de la dispersión relativa $\frac{\Delta^* E}{\tilde{E}}$ en el caso $N' \gg N$?

9. Una banda de goma está sujeta por un extremo a un clavo y soporta por el otro extremo un peso W. Suponga (como modelo microscópico sencillo de una banda de goma) que está compuesta de una cadena de polímeros ligados de N segmentos unidimensionales unidos extremo a extremo. Cada segmento tiene una longitud a y puede orientarse paralela o perpendicularmente a la dirección vertical descendente. Considerando el sistema como aislado y despreciando las energías cinéticas, los pesos de los segmentos o cualquier interacción entre ellos:

   a) Calcule la entropía S en función de la longitud L de la cadena.

   b) Encuentre una expresión para la longitud media $\langle L \rangle$ resultante de la banda de goma como función de W.

   c) Calcule la constante elástica.

10. Un sistema está formado por N_1 moléculas de tipo 1 y N_2 de tipo 2, encerradas dentro de una caja de volumen V. Se supone que las moléculas tienen interacciones mutuas muy débiles de forma que constituyen una mezcla de gas ideal.

   a) ¿Cómo depende el número total de estados $\Omega(E)$ en el intervalo entre E y $E + \Delta$ del volumen del sistema?

   b) Use el resultado anterior para hallar la ecuación de estado de este sistema, esto es, la presión p en función de V y T.

   c) Una ampolla de vidrio contiene aire a la temperatura ambiente y presión de $1atm$. Un físico la coloca en una cámara llena con gas de helio a $1atm$ y a la temperatura ambiente. Unos pocos meses más tarde, el físico lee en un periódico que el vidrio del que está hecha la ampolla es completamente permeable al helio, aunque no a los otros gases. Suponiendo que el equilibrio se ha alcanzado en el tiempo transcurrido, ¿cuál será la presión de gas que el físico medirá dentro de la ampolla cuando vaya a comprobarla?