PROYECCIONES

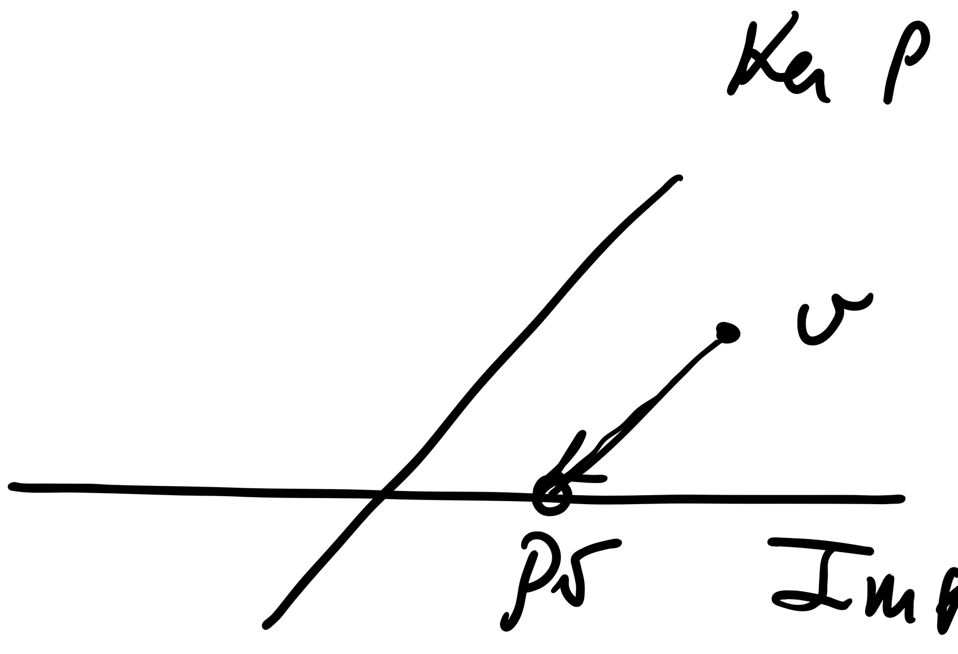
Sea V un esp. vect. (sobre $\mathbb{C}$). Una proyección es un operador lineal $P : V \to V$ que satisface $P^2 = P$.

Cuando V está dotado de un producto interno (y completo en el caso $\dim = \infty$, ~~[illegible]~~) decimos que la P proyección P es ortogonal si además satisface $P^* = P$.

~~Volvamos a las matrices $\mathbb{C}^{n\times m}$, y sea $P \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una proyección.~~

¿Qué sabemos de las proyecciones?

(Trabajamos con $\dim V < \infty$.)



- $P|_{\operatorname{Im} P} = Id|_{\operatorname{Im} P}$:

$$w = Pv \text{ para algún } w \Rightarrow Pw = P^2 v = Pv = w.$$

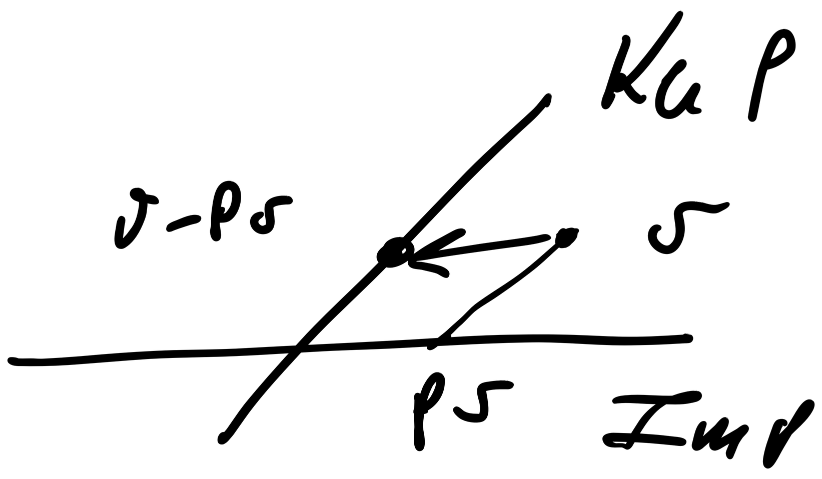
- $V = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$ y $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im}(I - P)$:

Todo $v \in V$ se puede escribir como $v = (v - Pv) + Pv$ donde $v - Pv \in \operatorname{Ker} P$ $\quad (P(v - Pv) = Pv - P^2 v = Pv - Pv = 0)$

Luego $V = \operatorname{Im} P + \operatorname{Ker} P$ pero por teo. de dimensiones la suma es directa (o observar que si $v \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$, entonces $v = Pw$ para algún w, luego $0 = Pv = P^2 w = Pw = v$, i.e. $v = 0$).

- Además es claro que $\operatorname{Im}(I - P) \subset \operatorname{Ker} P$, pero si $v \in \operatorname{Ker} P \Rightarrow Pv = 0$ $\Rightarrow v = v - Pv \in \operatorname{Im}(I - P)$

• $I-P$ también es proyección pero en $\mathrm{Ker}\,P$.



$$\to (I-P)^2 = I - P - P(I-P) = I - 2P + P^2$$
$$= I - P.$$

Dados dos subespacios S_1 y S_2 de V tq $V = S_1 \oplus S_2$ siempre existe una proyección P tal que $\mathrm{Im}\,P = S_1$ y $\mathrm{Ker}\,P = S_2$. Esto resulta de que todo vector v se escribe de manera única

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{con} \quad v_1 \in S_1 \ \text{y} \ v_2 \in S.$$

Luego podemos definir $P: V \to V$ como $P(v) = v_1$.
Es fácil ver que $P^2 = P$ y que cumple lo deseado.

Proyecciones Ortogonales

Una clase importante de proyecciones son las ortogonales.
Por definición P satisface $P^2 = P$ y $P^* = P$. Veremos que esto es equivalente a decir que P es una proyección tq $\mathrm{Im}\,P \perp \mathrm{Ker}\,P$.

~~Afirmación~~: $\boxed{\text{Si } P \text{ ~~orto~~ proyección ortogonal} \iff \mathrm{Im}\,P \perp \mathrm{Ker}\,P}$ ($P^2=P$)

($\Rightarrow$) Vimos $\mathrm{Ker}\,P = \{w - Pw : w \in V\}$, luego

$$\langle Pv, w - Pw\rangle = \langle v, P^*(w-Pw)\rangle = \langle v, \underset{=0}{P(w-Pw)}\rangle = 0.$$

(o matricialmente $(w-Pw)^* Pv = w^* Pv - w^* P^* P v$
$= w^* Pv - w^* P^2 v = w^* Pv - w^* Pv = 0$)

($\Leftarrow$) Una prueba sencilla es vía SVD.
Sabemos que ~~P~~ $P|_{\mathrm{Im}\,P}$ es la identidad y que $P|_{\mathrm{Ker}\,P} = 0$.
Por lo que tomando base ortonormal $\{q_i\}_{i=1..n}$ de V tq $\{q_1, \dots, q_k\}$ base de $\mathrm{Im}\,P$ y $\{q_{k+1}, \dots, q_n\}$ base de $\mathrm{Ker}\,P$ $\Rightarrow P = Q \begin{pmatrix} I_k & \\ & 0 \end{pmatrix} Q^*$, $Q = (q_1 | \cdots | q_n) \Rightarrow P^* = P$ □

La equivalencia anterior nos da pie para lo siguiente.
Si P es una proy. ortogonal entonces existe $\hat{Q} = (q_1|\ldots|q_\ell)$ tq

$$P = \hat{Q}\hat{Q}^* = (q_1|\ldots|q_\ell)\begin{pmatrix} q_1^* \\ \vdots \\ q_\ell^* \end{pmatrix}$$

Mas en general, sea $\{q_1, \ldots q_n\}$ un conjunto ortonormal en $\mathbb{C}^m$ $(m \geq n)$
Si recordamos página 7 de estos apuntes (Clase 1) ~~podemos~~ sabemos que

$$v = r + \sum_{i=1}^{n} (q_i q_i^*) v$$

representa la descomposición del vector (columna) v en componentes en las columnas de la matriz $\hat{Q} = (q_1|\ldots|q_n)$ mas un vector r ortogonal a estos.

Por lo tanto el mapa $v \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (q_i q_i^*) v$

es la proyección ortogonal en $\mathrm{Im}(\hat{Q})$ y podemos escribir de manera abreviada

$$y = Pv = \hat{Q}\hat{Q}^* v \qquad \boxed{y} = \boxed{\hat{Q}}\,\boxed{\hat{Q}^*}\,\boxed{v}$$

En este sentido la matriz $\hat{Q}\hat{Q}^*$ es siempre una proyección ortogonal en $\mathrm{Im}(\hat{Q})$
En particular, en el caso $m = n$ $\hat{Q}\hat{Q}^* = \mathrm{Id}_m$.

Análogamente, se prueba $I - \hat{Q}\hat{Q}^*$ es la proy. ortogonal en $\mathrm{Im}\,\hat{Q}^{\perp}$
(Obs: $(I - \hat{Q}\hat{Q}^*)^* = (I - \hat{Q}\hat{Q}^*)$).

Un caso importante de proyección ortogonal es el caso de matrices de rango 1 $P_q = q\cdot q^*$, $q \in \mathbb{C}^m$, $\|q\|=1$. Como vimos a partir de estas se construyen las proy. ortogonales: $\hat{Q} = q_1 q_1^* + \dots + q_n q_n^*$.

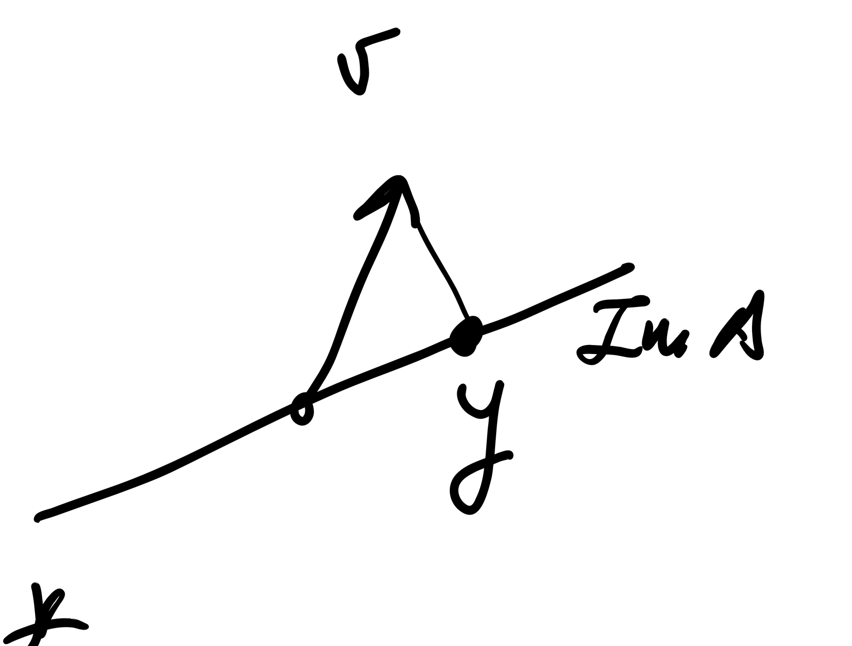
Observar que la proy. complementaria $Id - qq^*$ es exactamente la proy. ortogonal en $q^{\perp} = (\mathrm{Im}\, qq^*)^{\perp}$.

Dado $a \in \mathbb{C}^m$ genérico, el operador $\dfrac{aa^*}{\|a\|^2} = \dfrac{aa^*}{a^*a}$ es la proy. ortogonal en esa dirección, y

$Id - \dfrac{aa^*}{\|a\|^2}$ la proy. ortogonal en $a^{\perp}$.

¿Cómo se obtiene una proy. ortogonal en un subespacio $V = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle$ generado por vectores $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ en $\mathbb{C}^m$?

Sea $A = (a_1 | \dots | a_n)$ de rango máximo ($\{a_j\}$ l.i.).



Sea $y = \Pi_{\mathrm{Im} A}(v)$ la proyección ortogonal de v en la $\mathrm{Im}\, A$.

Luego $v - y \perp \mathrm{Im}(A)$ y por lo tanto $a_j^*(v-y) = 0$ $(j=1,\dots,n)$

i.e. $A^*(v-y) = 0$ sii $A^*v = A^*y$.

Por otro lado $y = Ax$ para algún vector x columna, y por lo tanto

$$A^*v = A^*Ax,$$ donde $A^*A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible (*)

$$\Rightarrow (A^*A)^{-1}A^*v = x$$ y por lo tanto se puede concluir

$$y = \Pi_{\mathrm{Im} A}\, v \overset{\downarrow}{=} Ax = A(A^*A)^{-1}A^*v \Rightarrow \boxed{\Pi_{\mathrm{Im} A} = A(A^*A)^{-1}A^*}$$

(*) $A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{pmatrix} V^*$ reducida $\to A^*A = V \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} V^*$ invertible. || en $\mathbb{R}^m$ $\mathrm{vol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sqrt{\det A^*A}$ → matriz de Gram