Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Licenciatura en Matemática
Teoría de Representaciones
Año 2022

Repartido 3: Representaciones inducidas

Aquí G es finito y las representaciones son de dimensión finita.
Además, hasta el ejercicio 7, el cuerpo de base es $\Bbbk = \mathbb{C}$.

1. Describir la representación inducida a S_3 de la representación irreducible no trivial de S_2.

2. Sea $H \leq G$.

   a) Probar que toda representación irreducible de G está contenida en una representación inducida por una representación irreducible de H.

   b) Deducir que si n es una cota para el grado de las representaciones irreducibles de H entonces $n|G : H|$ lo es para las de G.

   c) Deducir que si H es abeliano, toda representación irreducible de G es de grado menor o igual que $|G : H|$.

3. Sea $G = H_1 \times H_2$. Probar que si (V, ρ) es una H_1-representación, su G-representación inducida es $(V, \rho) \otimes (\Bbbk H_2, r_2)$, donde el segundo factor es la representación regular de H_2.

4. Sea $H \leq G$. Si (V, ρ) y (W, τ) son representaciones de H y G respectivamente, probar que
$$Ind_H^G((V, \rho) \otimes Res_H^G(W, \tau)) \cong Ind_H^G(V, \rho) \otimes (W, \tau).$$

5. Consideremos el grupo diedral D_n.

   a) Hallar sus representaciones irreducibles de grado 1.

   b) Hallar sus representaciones inducidas por las irreducibles de su subgrupo cíclico C_n.

   c) Describir todas sus representaciones irreducibles.

6. Consideremos el grupo de permutaciones pares A_4 y sus elementos $x = (12)(34), y = (13)(24), z = (14)(23)$.

   a) Observar que $H = \{e, x, y, z\} \leq A_4$.

b) Probar que $\phi(e) = \phi(x) = 1$, $\phi(y) = \phi(z) = -1$ define una representació de grado 1 de H.

c) Calcular la representación de A_4 inducida por ϕ.

d) Calcular su carácter y deducir que es irreducible.

7. Especificar un isomorfismo lineal

$$Hom_H(Res_H^G V, W) \cong Hom_G(V, Ind_H^G V)$$

para W, V respectivamente representaciones de H y G, siendo H subgrupo de G.

8. Se considera un cuerpo finito $\mathbb{k}$ y los grupos:

- $G = SL_2(\mathbb{k})$ de matrices de determinante 1.
- H el subgrupo de H de las matrices triangulares superiores de determinante 1.

a) Hallar los órdenes de G y H en función del cardinal p^n de $\mathbb{k}$.

b) Probar que H tiene exactamente dos K-coclases dobles.

c) Se considera, para cada morfismo de grupos multiplicativos $w : \mathbb{k}^\times \to \mathbb{C}^x$, la $\mathbb{C}$-representación de orden 1 de H definida por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \lambda = w(a)\lambda,$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H$. Probar que su inducida en G es irreducible si y sólo si $w^2 \neq 1$.

d) Deducir que para cualquier p hay representaciones de $SL_2(\mathbb{k})$ que no son inducidas por una de representación 1 en H.

e) Deducir además que $SL2(\mathbb{k})$ tiene al menos $p^n + 1$ clases de conjugación.

9. Se considera $H \leq G$ y $f : H \to \mathbb{C}$ constante en las clases de conjugación de H.

a) Probar que $f' : G \to \mathbb{C}$ definida por

$$f'(s) = \frac{1}{|H|} \sum_{t^{-1}st \in H} f(t^{-1}st)$$

es constante en las clases de conjugación de G.

b) Si χ es el carácter de una representación (W, θ) de H, entonces χ' es el carácter de su representación inducida en G.

10. *a*) Supongamos que $B \subseteq A$ es una inclusión de $\Bbbk$-subálgebras y que X e Y son respectvamente B y A módulos a izquierda. Probar que

$$Hom_A(Ind_B^A X, Y) \cong Hom_B(X, Res_B^A Y) \text{ como espacios vectoriales}$$

b) Deducir que si H es un subgrupo de G si V es una $\Bbbk$-representación de H, entonces $Ind_H^G(V, \rho) \cong \Bbbk G \otimes_{\Bbbk H} V$ como $\mathbb{C}$-representaciones de G.

11. *a*) Sean A, B, C, D $\Bbbk$-álgebras conmutativas. Se consideran bimódulos $X, X' \in {}_A\mathcal{M}_B, Y, Y' \in {}_B\mathcal{M}_C, Z \in {}_C\mathcal{M}_D$. Probar que:

1) $(X \otimes_B Y) \otimes_C Z \cong X \otimes_B (Y \otimes_C Z)$, como $A - D$ bimódulos.
2) $(X \otimes_B B \cong X)$ y $A \otimes_A X \cong X$ como $A - C$ bimódulos.
3) $X \otimes_B (Y \oplus Y') \cong X \otimes_B Y \oplus X \otimes_B Y'$ y $(X \oplus X') \otimes_B Y \cong X \otimes_B Y \oplus X' \otimes_B Y$ como $A - C$ bimódulos.

b) Deducir, para $H \leq K \leq G$ inclusión de subgrupos que y V, V' $\mathbb{C}$-representaciones de H las siguientes isomorfismos entre $\Bbbk$- representaciones de G:

1) $Ind_K^G(Ind_H^K(V)) \cong Ind_H^G(V)$,
2) $Ind_H^G(\Bbbk H) \cong \Bbbk G$,
3) $Ind_H^G(V \oplus V') \cong Ind_H^G(V) \oplus Ind_H^G(V')$.

12. Sean A, B álgebras conmutativas sobre $\mathbb{C}$ y $f : A \to B$ un morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras (i.e. un morfismo $\mathbb{C}$- lineal de anillos). Probar que si $a \in A$ es entero, entonces $f(a) \in B$ es entero.

13. Sea G un grupo de orden p^2.

a) Probar que toda $\mathbb{C}$-representación irreducible de G tiene dimensión 1.

b) Deducir que G es abeliano.

14. Se considera un grupo G y una $\mathbb{C}$- representación (V, ρ) de G.

a) Supongamos además que H es un subgrupo normal de G que actúa trivialmente en V.

1) Probar que $(V, \hat{\rho})$ con $\hat{\rho} : G/H \to End(V)$ definida como $\hat{\rho}(gH) = \rho(g)$ es una representación de G/H.
2) Probar que si (V, ρ) es irreducible, entonces $(V, \hat{\rho})$ también lo es.
3) Deducir que si (V, ρ) es irreducible, $dimV$ divide a $\frac{|G|}{|H|}$.

b) Suponemos ahora para el resto del ejercicio que (V, ρ) es irrducible. Sea $K = \{z_1, z_2, \cdots, z_m \in Z(G) \mid z_1 z_2 \cdots z_m = 1\} \leq G \times G \times \cdots \times G$.

1) Probar que $K \leq G^m$ es normal y que actúa trivialmente en $V^{\otimes n}$.
2) Deducir que $(dimV)^m$ divide a $\frac{|G|^m}{|Z(G)|^{m-1}}$.