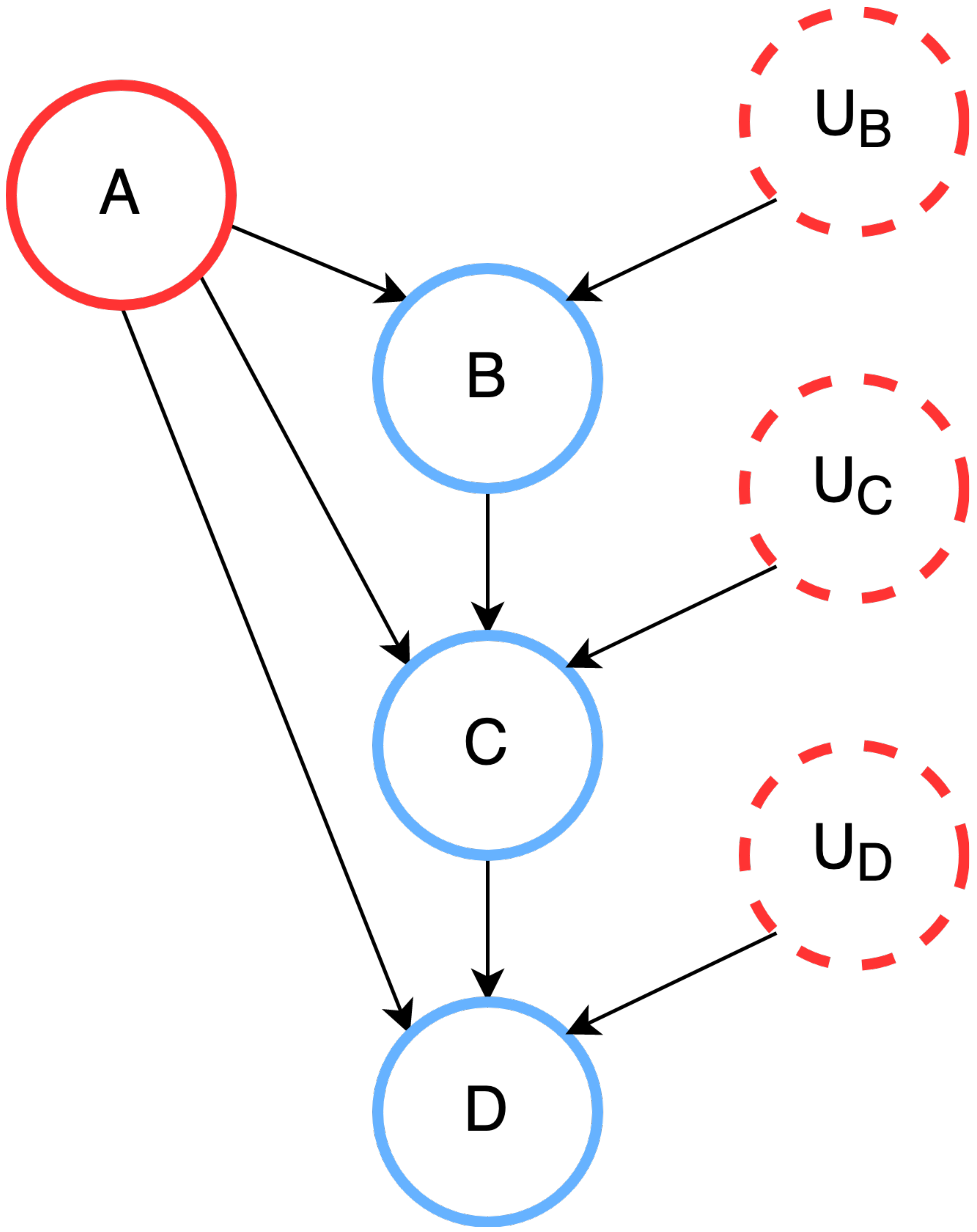
MARTÍN BATISTA - SEMINARIO INFERENCIA CAUSAL

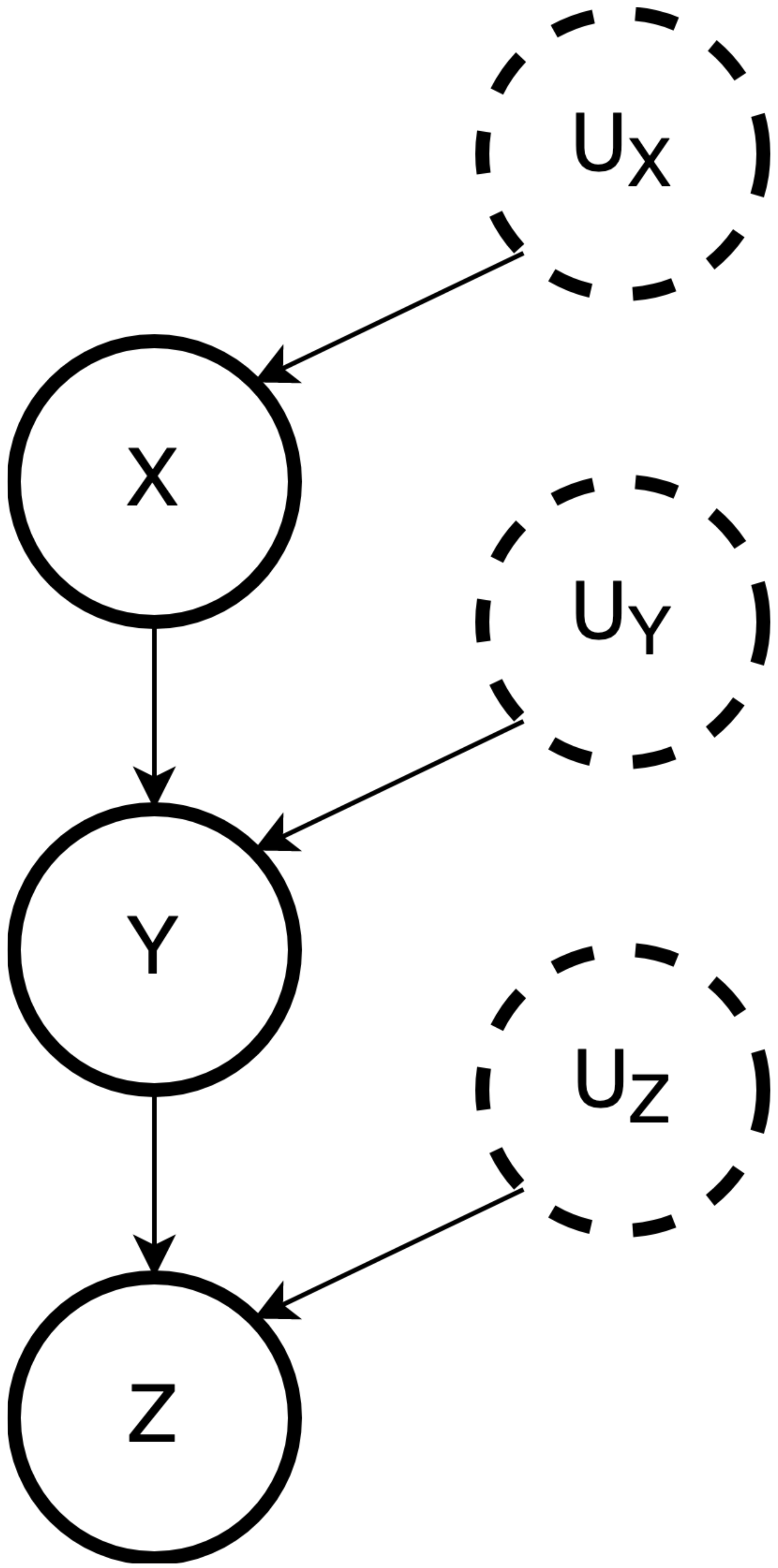
GRAFOS CAUSALES

1.5 - STRUCTURAL CAUSAL MODELS

- SCM (definición):
  - Dos conjuntos de variables:
    - Exógenas (externas): U
    - Endógenas (internas): V
  - Un conjunto de funciones $\{f_v : v \in V\}$.
    - Una función para cada variable endógena definida a partir de las otras.
  - Ecuaciones estructurales:
    - $B := f_B(A, U_B)$
    - $C := f_C(A, B, U_C)$
    - $D := f_D(A, C, U_D)$



- $V = \{X, Y, Z\}$, $U = \{U_X, U_Y, U_Z\}$, $F = \{f_X, f_Y, f_Z\}$
- $f_x : X = U_X \quad , \quad f_Y : Y = \dfrac{X}{3} + U_Y \quad , \quad f_Z : Z = \dfrac{Y}{16} + U_Z$
- (b) $\mathbb{E}[Z \mid Y = 3]$?
  - $\mathbb{E}[Z \mid Y = 3] = \mathbb{E}\left[\dfrac{3}{16}\right] + \mathbb{E}[U_Z] = 3/16 \approx 0.19$
- (c) $\mathbb{E}[Z \mid X = 3]$?
  - $\mathbb{E}[Z \mid X = 3] = \mathbb{E}\left[(\dfrac{3}{3} + U_Y)/16\right] + \mathbb{E}[U_Z] = 1/16 \approx 0.06$
- (d) $\mathbb{E}[Z \mid X = 1, Y = 3]$?
  - Al condicionar en $Y = 3$; X y Z están d-separados (más adelante), tenemos el mismo resultado que (b).



EJEMPLO EN R
INTRODUCCIÓN A GRAFOS

FACTORIZACIÓN Y REDES BAYESIANAS

- Para modelar la asociación entre variables, nos interesa determinar la distribución conjunta $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

- Usando la regla de la cadena podemos factorizar la distribución:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(x_1) \prod_i P(x_i \mid x_{i-1}, \ldots, x_1)$$

- Hay un problema con éste enfoque de fuerza bruta:
  - Consideremos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ variables binarias.
  - Para codificar $P(X_n = 1 \mid x_{n-1}, \ldots, x_1)$ precisamos 2^{n-1} parámetros.
  - Consideremos el ejemplo para $n = 4$.
  - Esto se vuelve rápidamente intractable.

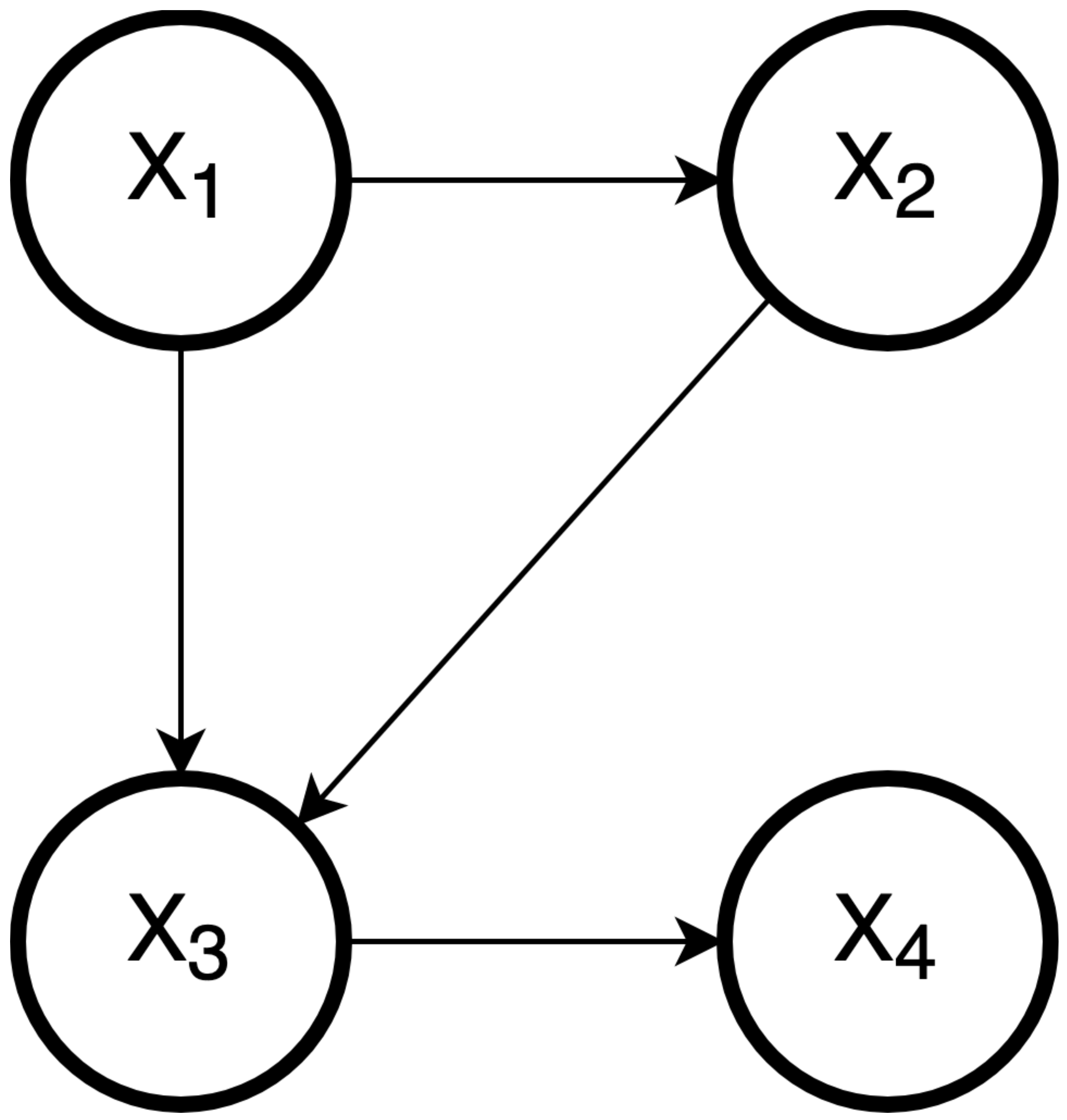
x_1	x_2	x_3	$P(x_4 \mid x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	α_1
0	0	1	α_2
0	1	0	α_3
0	1	1	α_4
1	0	0	α_5
1	0	1	α_6
1	1	0	α_7
1	1	1	α_8

Se requieren $2^3 = 8$ parámetros.

Source: Brady Neal - Introduction to Causal Inference.

- Podemos simplificar el problema si modelamos dependencias locales.
- Por ejemplo: Si sospechamos que x_4 depende de x_3 y no de las otras variables, consideramos $P(x_4 \mid x_3)$ en vez de $P(x_4 \mid x_3, x_2, x_1)$.
- Para preservar nuestra cordura, introducimos las redes Bayesianas.
- Son modelos en base a grafos dirigidos acíclicos que nos permite codificar las dependencias que creemos existen en los datos.
- Por ejemplo, el grafo de la derecha codifica la relación:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(x_1)P(x_2 \mid x_1)P(x_3 \mid x_2, x_1)P(x_4 \mid x_3, x_2, x_1)$$



- Regla de descomposición de productos:
  - La factorización de las redes Bayesianas cumplen (Markov local):

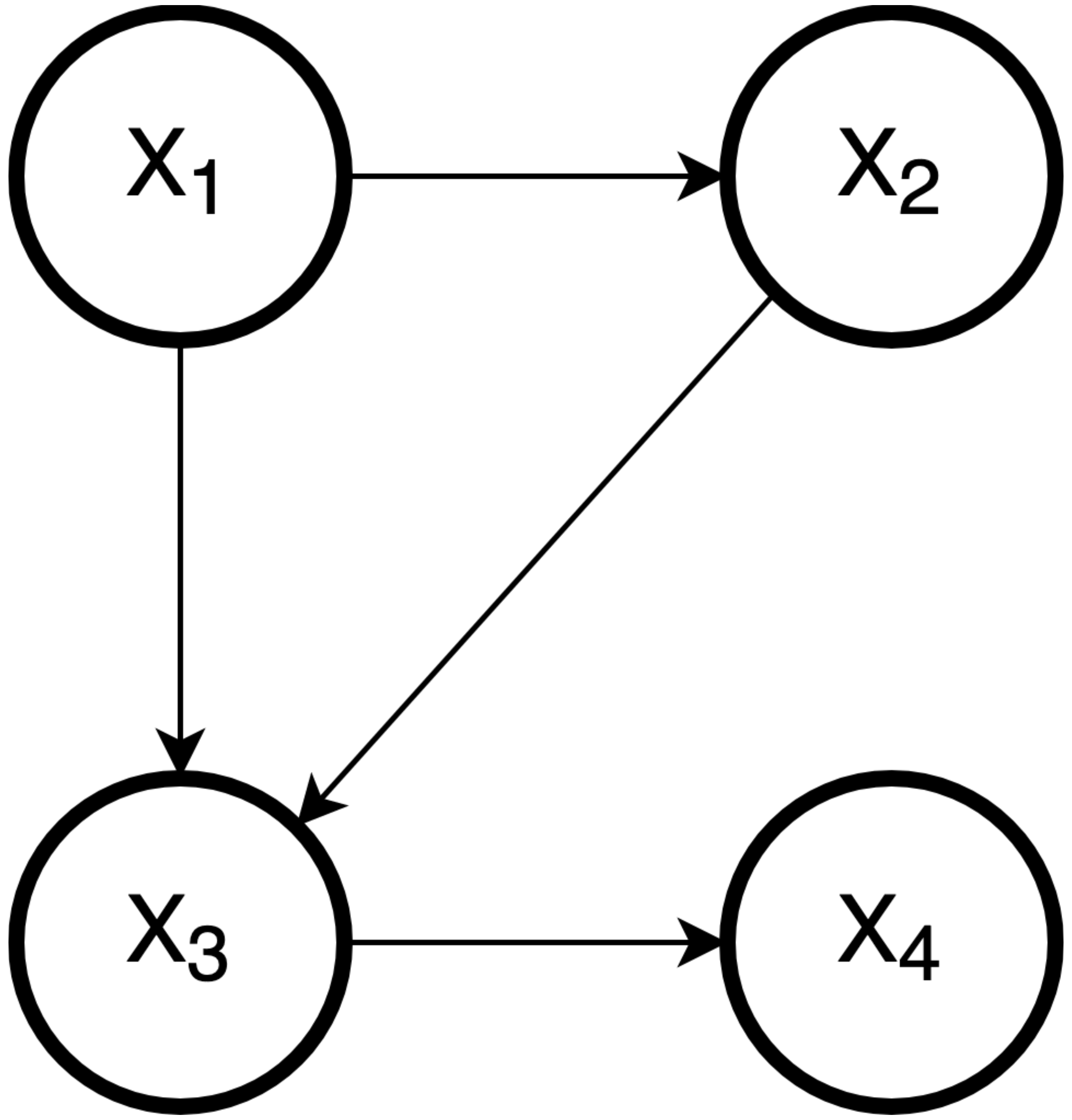
$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i \,|\, \mathrm{pa}_i)$$

- Dados los padres en un DAG, un nodo X es independiente de todos sus no-descendientes.
- O sea:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(x_1)P(x_2 \,|\, x_1)P(x_3 \,|\, x_2, x_1)P(x_4 \,|\, x_3, x_2, x_1)$$

- Se convierte en:

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = P(x_1)P(x_2 \,|\, x_1)P(x_3 \,|\, x_2, x_1)P(x_4 \,|\, x_3)$$



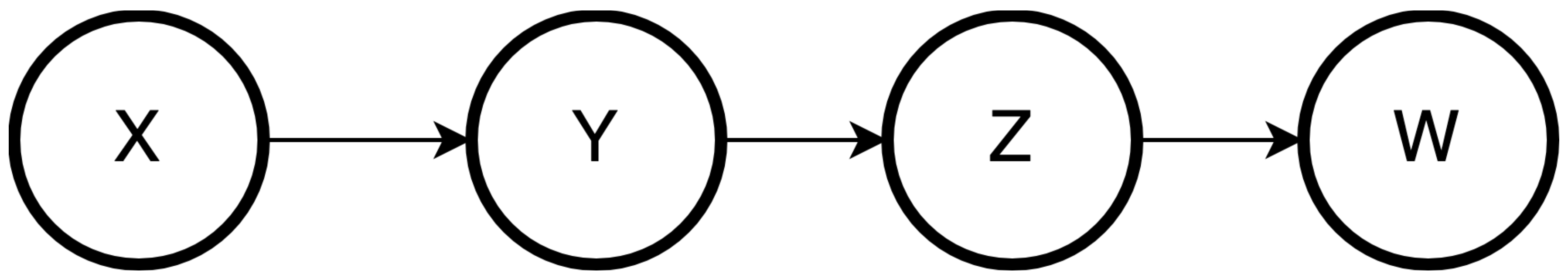
- Consideremos el modelo:

$$X \to Y \to Z \to W$$

- Donde:
  - X : nublado/no-nublado
  - Y : lluvia/no-lluvia
  - Z : pavimento húmedo/seco
  - W : pavimento resbaladizo/no-resbaladizo
- Que probabilidad hay que:

$P(\text{nublado, no-lluvia, pavimento seco, pavimento resbaladizo}) = 0.23$?

$$P(\text{nublado, no-lluvia, pavimento seco, pavimento resbaladizo}) = 0.23 \text{ ?}$$



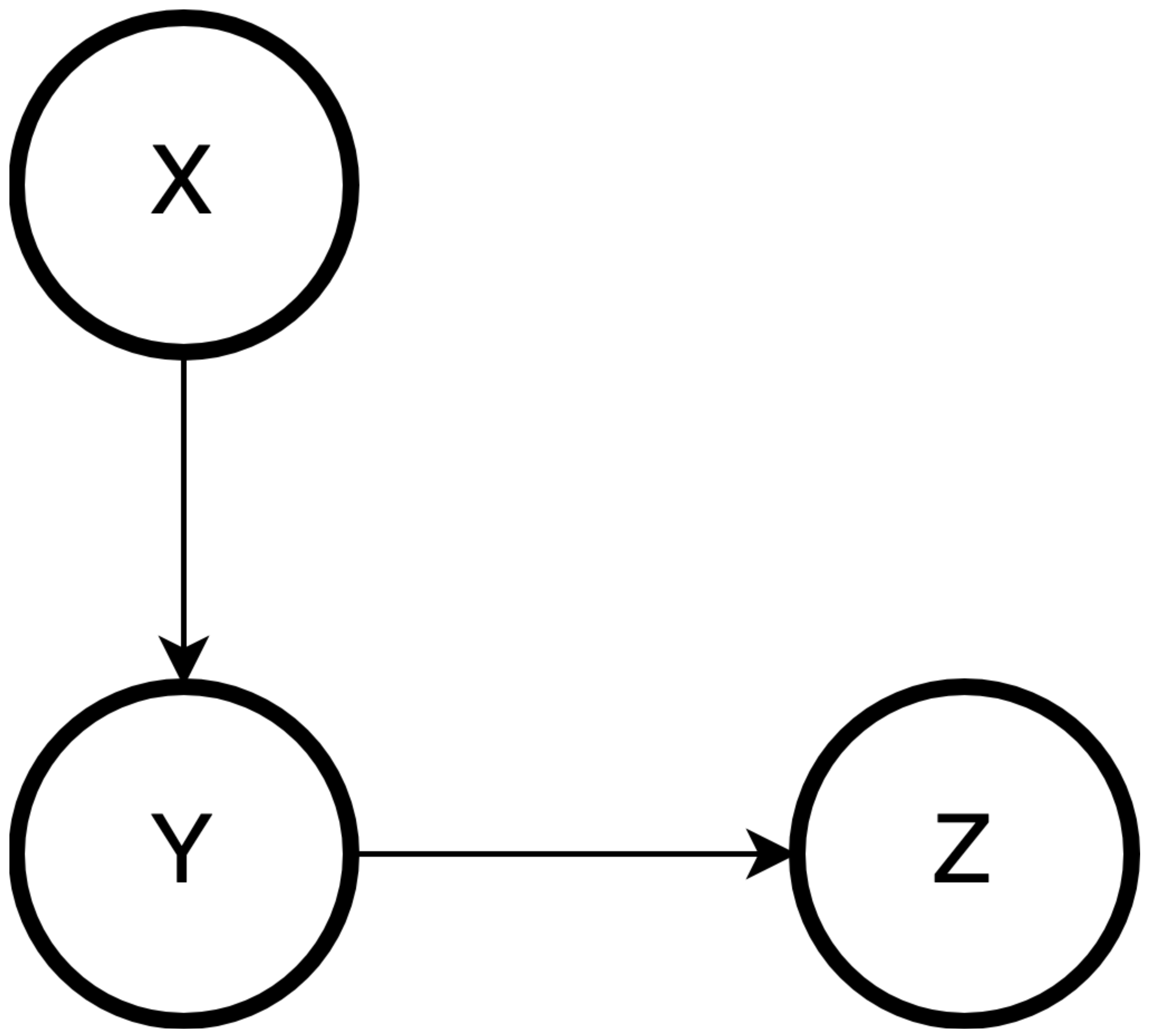
- Donde:
  - X : nublado/no-nublado
  - Y : lluvia/no-lluvia
  - Z : pavimento húmedo/seco
  - W : pavimento resbaladizo/no-resbaladizo
- Factorizando:

$$P(\text{nublado})P(\text{no-lluvia}|\text{nublado})P(\text{pavimento seco}|\text{ no lluvia})P(\text{pavimento resbaladizo}|\text{pavimento seco})$$

- Podemos estimar, aproximadamente: $0.5 \times 0.75 \times 0.9 \times 0.05 = 0.0169$

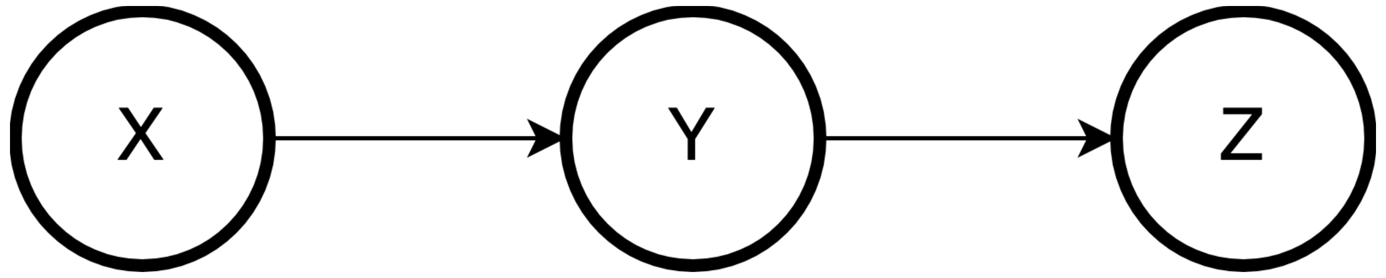
GRAFOS CAUSALES

- ¿Qué es una causa?
  - Decimos que una variable X es una causa de una variable Y si Y cambia en respuesta a cambios en X.
  - Judea Pearl dice: *"X es causa de Y si Y escucha a X."*
- Grafo causal:
  - Es una red Bayesiana donde los padres son causas directas de los hijos.

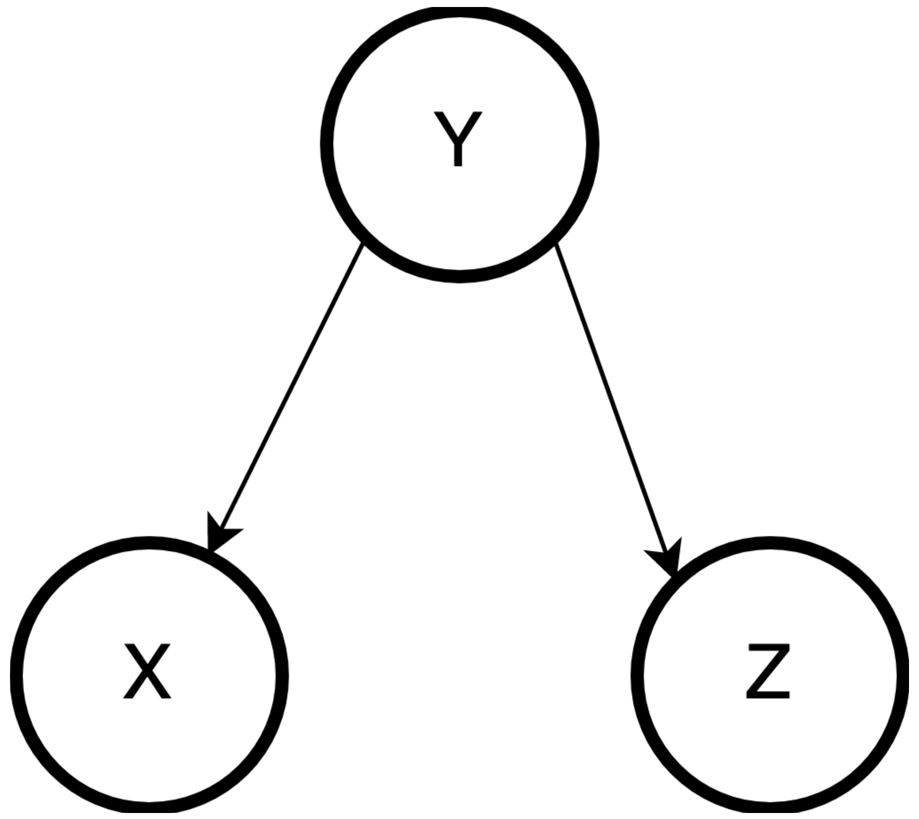


X es causa de Y
Y es causa de Z
X no es causa (directa) de Z

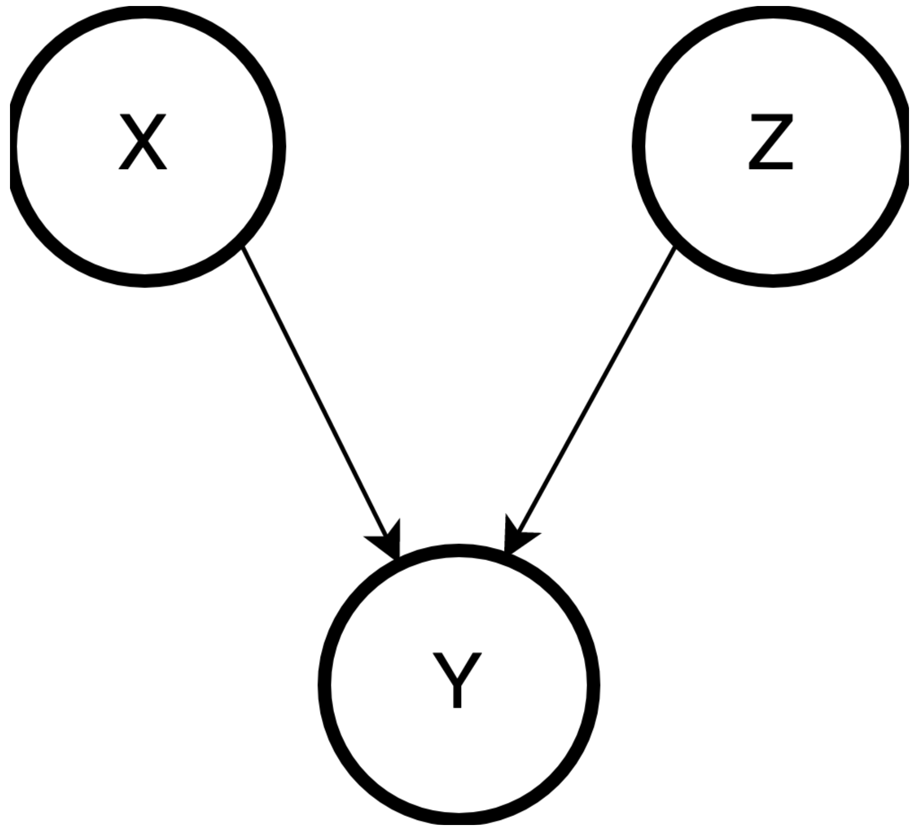
ESTRUCTURAS BÁSICAS



Cadena (chain)

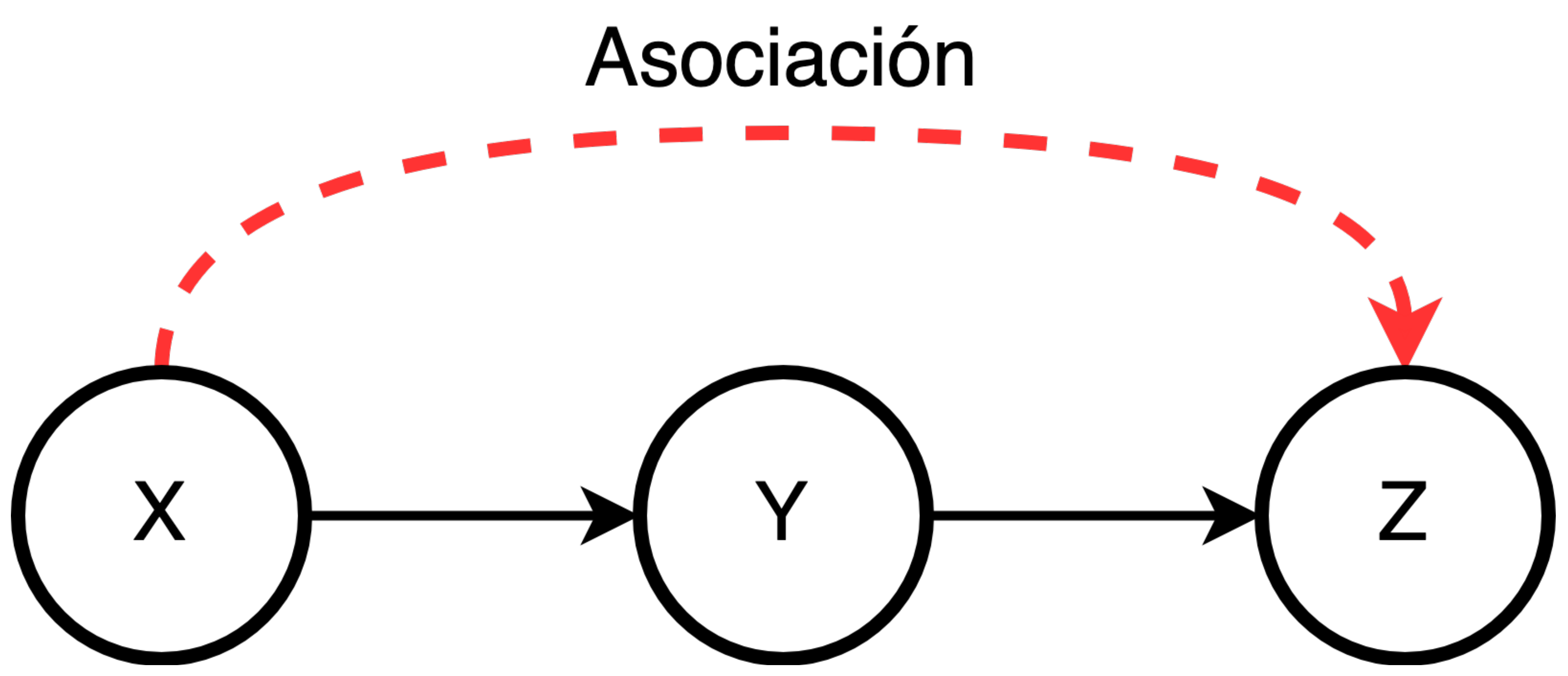


Bifurcación (fork)

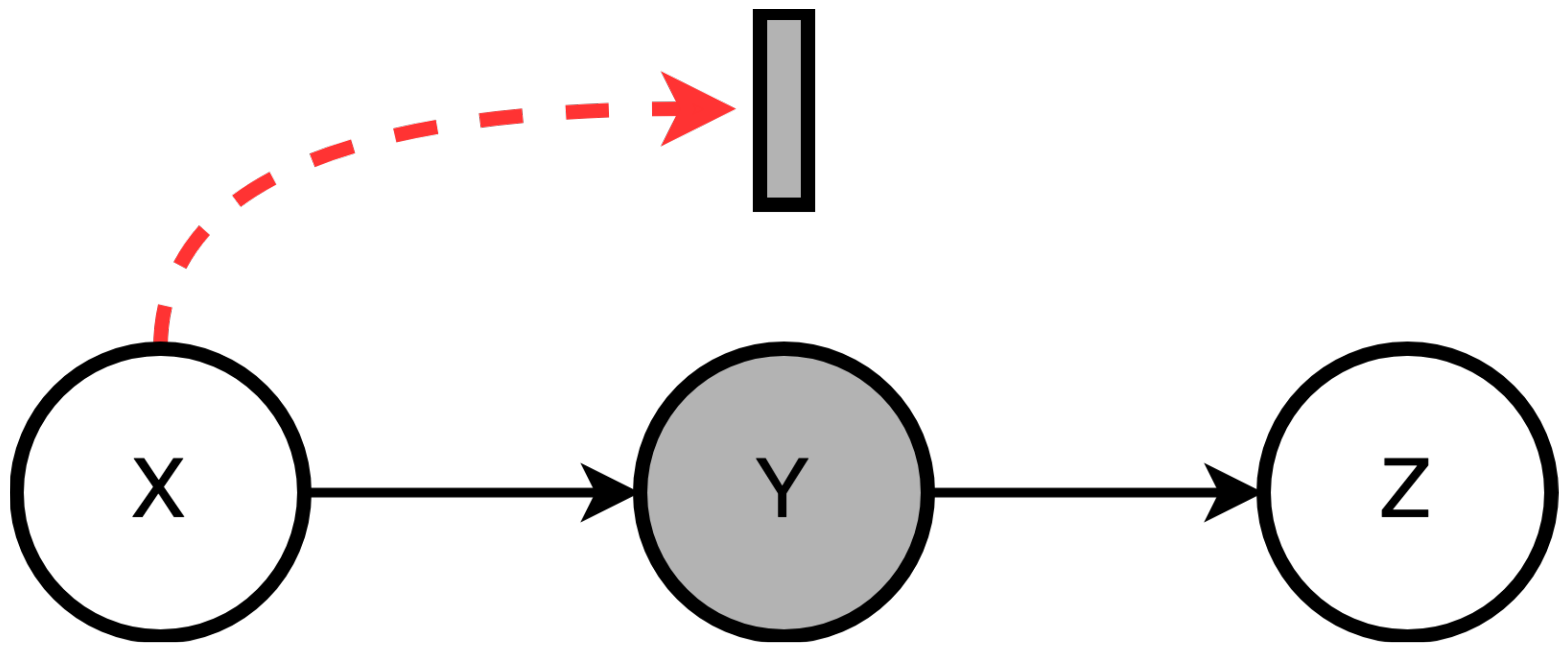


Inmoralidad?
(Immorality)

- En las cadenas, si bien X no es causa directa de Z, generalmente (hay casos patológicos e.g. SCM 2.2.4) fluye asociación entre ambas variables.
- Lo hace mediante la variable de confusión Y
- X induce cambios en Y que a su vez induce cambios en Z
- La asociación es simétrica, Z está asociada con X como X está asociada a Z.

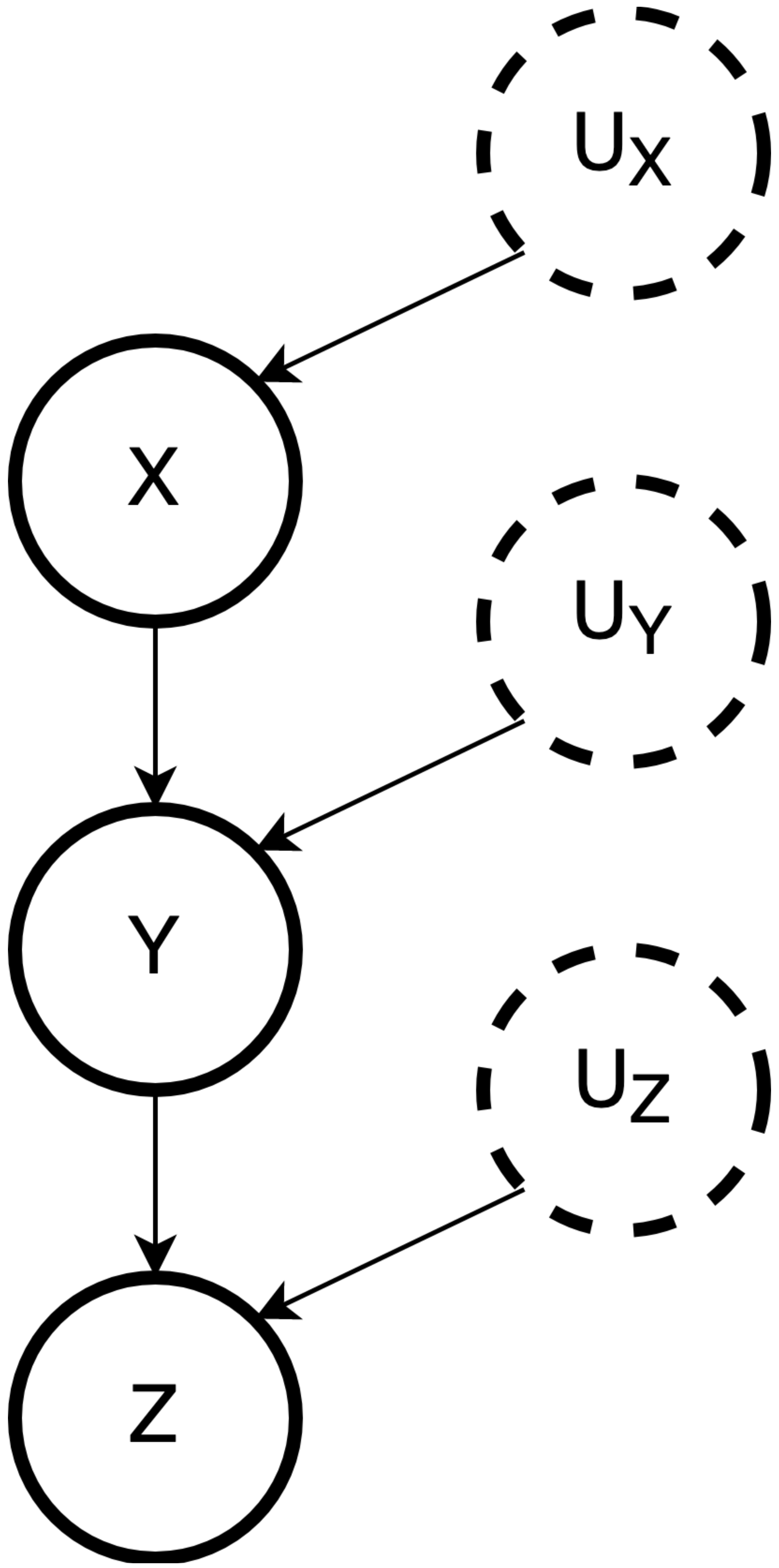


- Si condicionamos respecto a Y, bloqueamos la asociación:
  - $P(x, y, z) = P(x)P(y\,|\,x)P(z\,|\,y)$ (cadena)
  - $P(x, z\,|\,y) = \dfrac{P(x, y, z)}{P(y)}$ (regla de Bayes)
  - $P(x, z\,|\,y) = \dfrac{P(x)P(y\,|\,x)P(z\,|\,y)}{P(y)}$ (sustitución)
  - $P(x, z\,|\,y) = \dfrac{P(x, y)}{P(y)}P(z\,|\,y)$ (Bayes de nuevo)
  - $P(x, z\,|\,y) = P(x\,|\,y)P(z\,|\,y)$
- Obtenemos que: $X \perp Z\,|\,Y$.
- X y Z son condicionalmente independientes. ¿Tiene sentido?

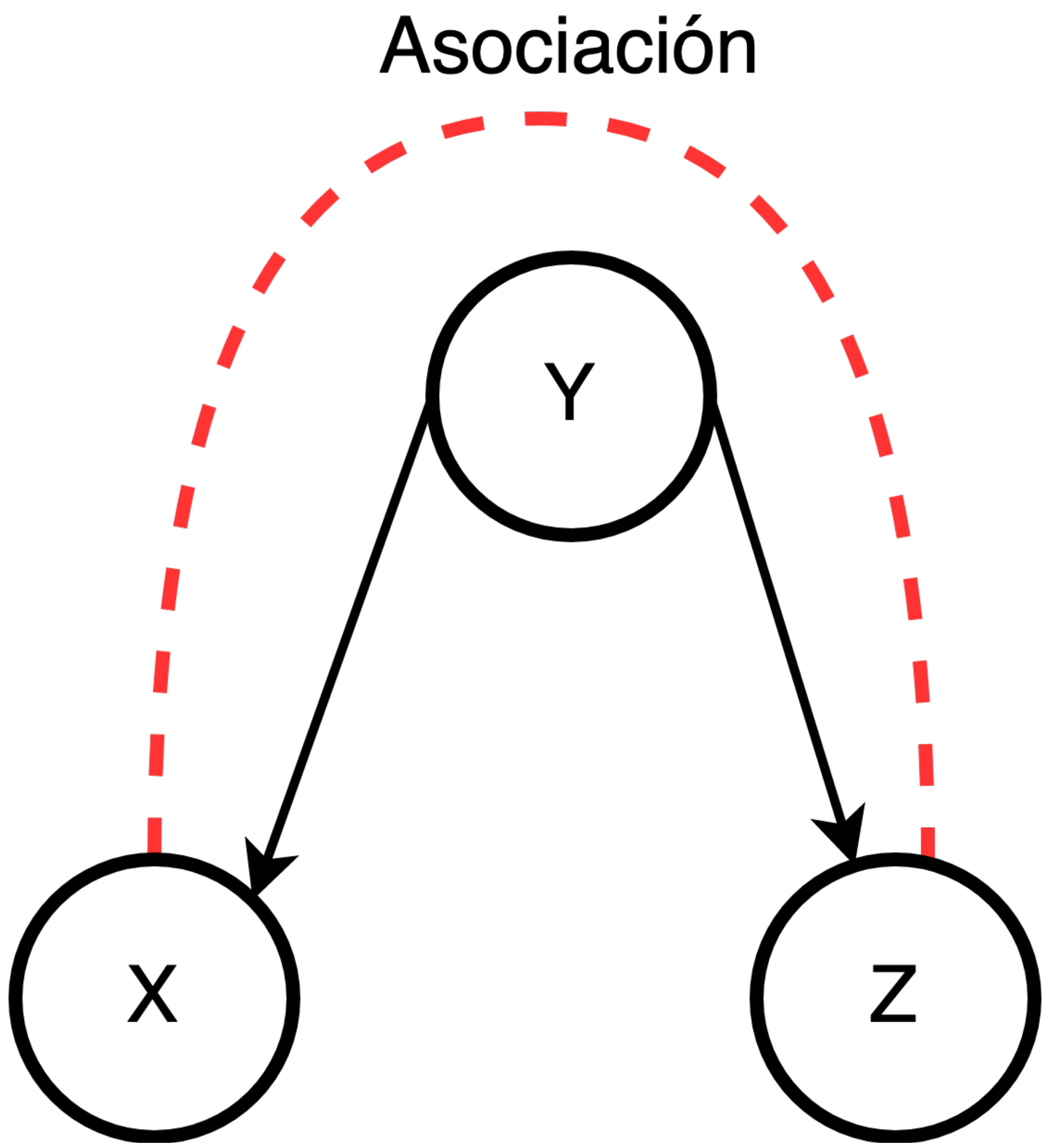


Condicionar en cadenas rompe la asociación

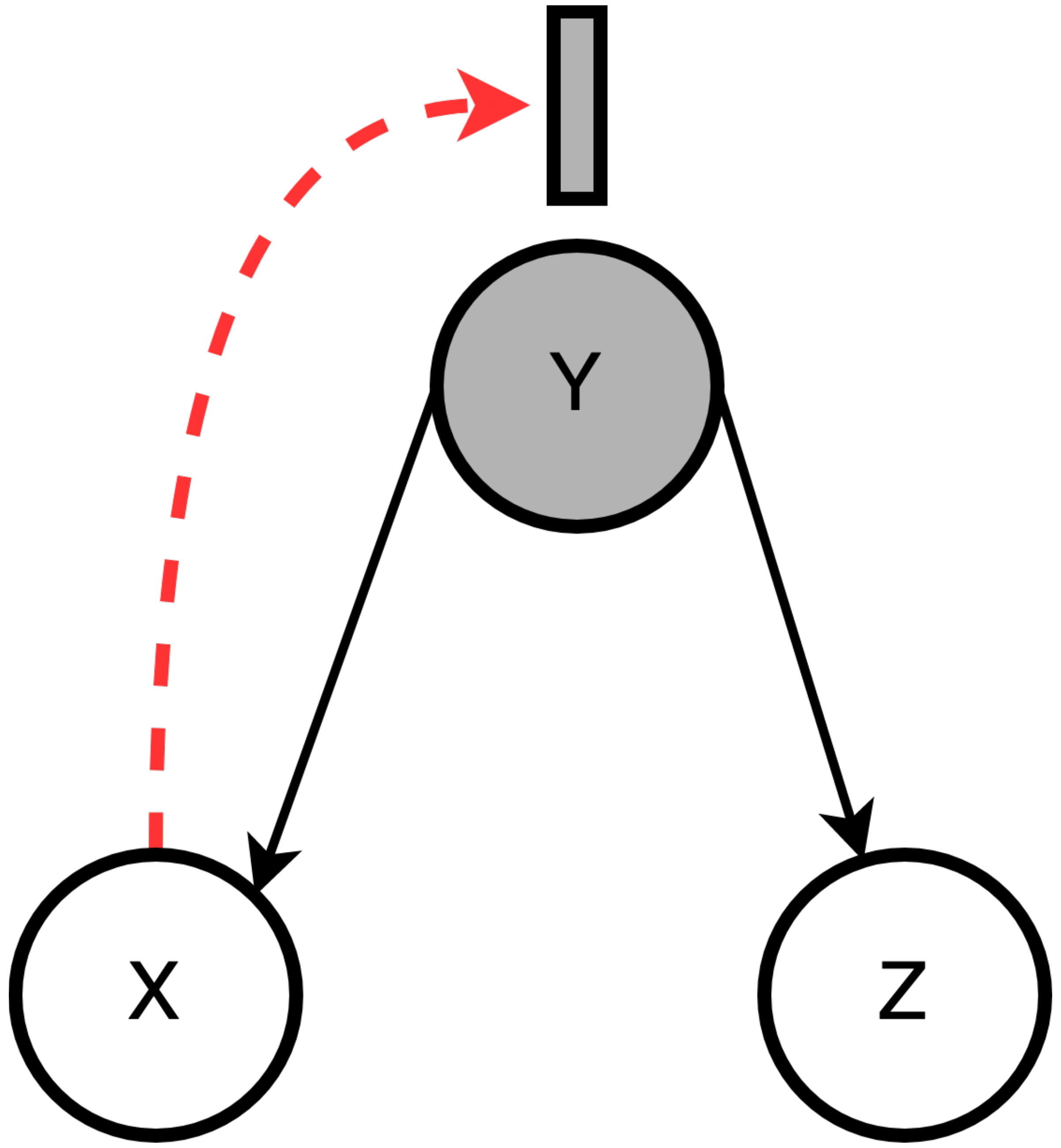
- Las variables X, Y, Z son binarias.
- Al condicionar en Y estamos considerando los casos $Y = 0$ e $Y = 1$.
- Consideramos el caso $Y = 0$
- Al cambiar los valores de X simultáneamente cambian los valores de U_Y de forma que la Y se mantenga en $Y = 0$.
- Z no logra escuchar ningún cambio en Y inducido por X.
- O sea: por la propiedad de Markov local, cada variable depende de los valores de sus padres.
- Si condicionamos sobre los mismos, se vuelven independientes.



- Ocurre lo mismo con las bifurcaciones. Comparten las mismas independencias que las cadenas.



En las bifurcaciones también fluye asociación entre las variables.



Nuevamente condicionando, se puede bloquear.

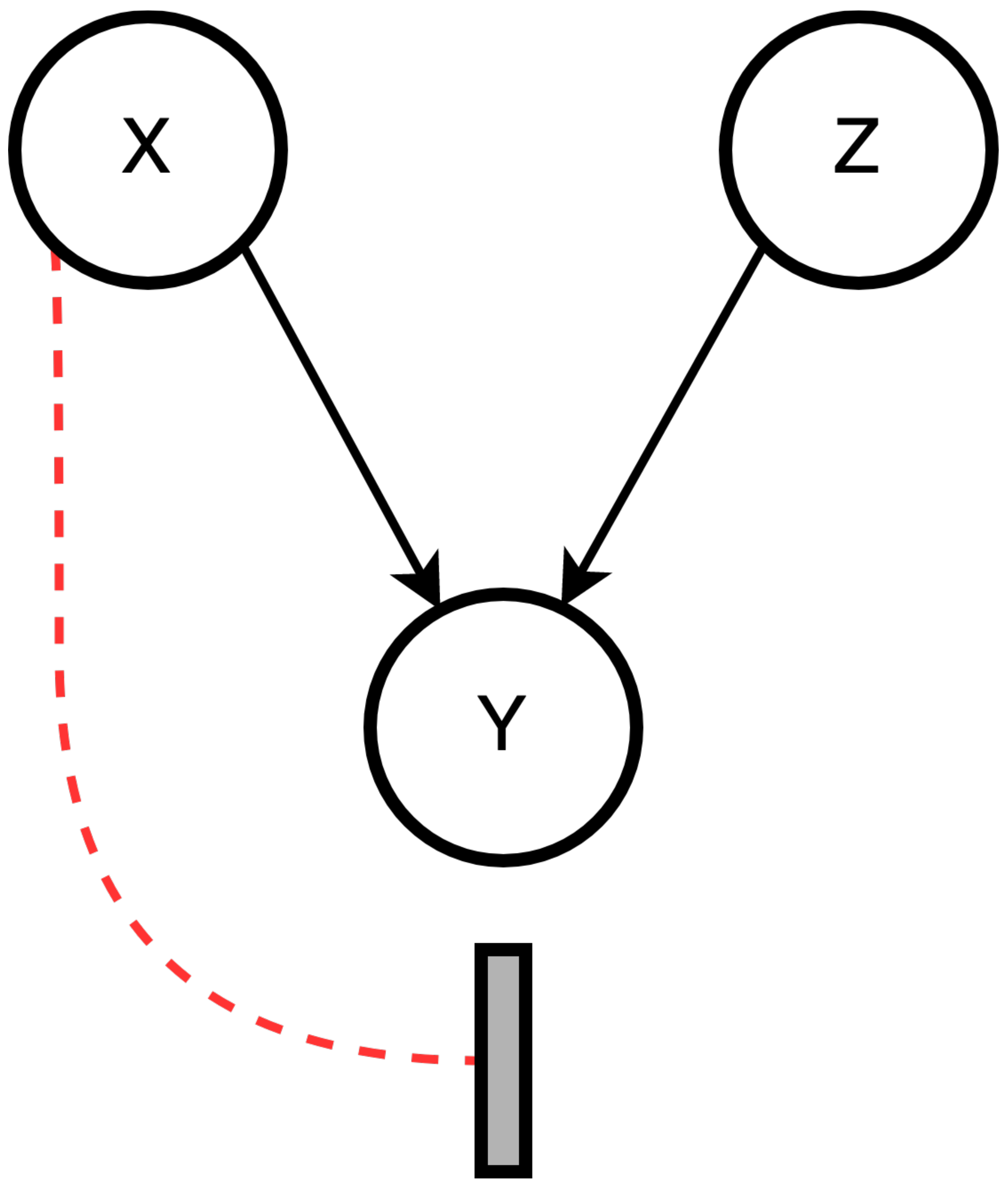
- Con las inmoralidades la historia es diferente.
- X y Z simplemente son eventos no relacionados que contribuyen an un efecto común en Y.
- O sea: $X \perp Z$

$$P(x,z) = \sum_y P(x,y,z)$$

$$= \sum_y P(x)P(z)P(y \mid x,z)$$

$$= P(x)P(z) \sum_y P(y \mid x,z)$$

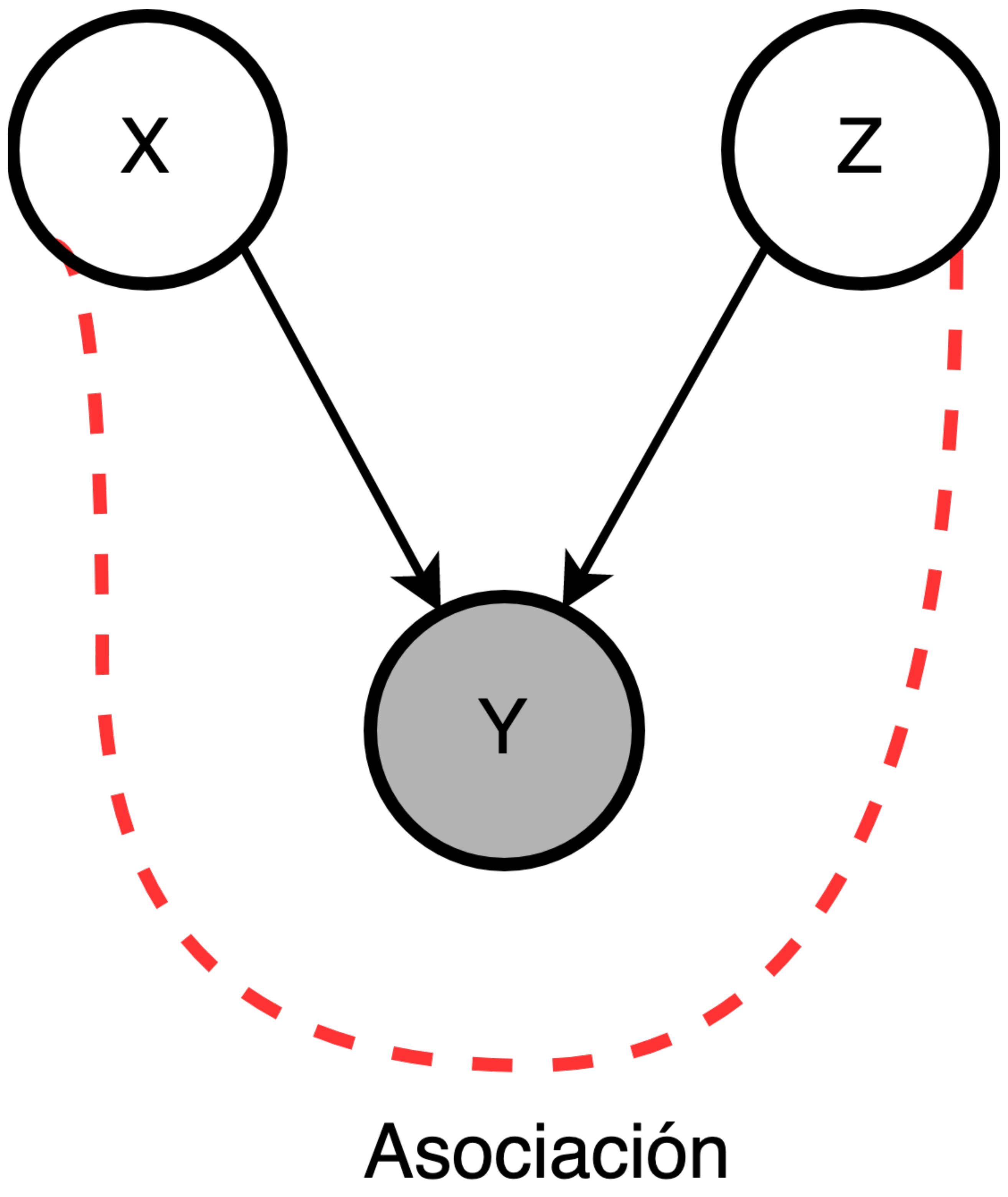
$$= P(x)P(z)$$



En las inmoralidades no fluye asociación entre X y Z

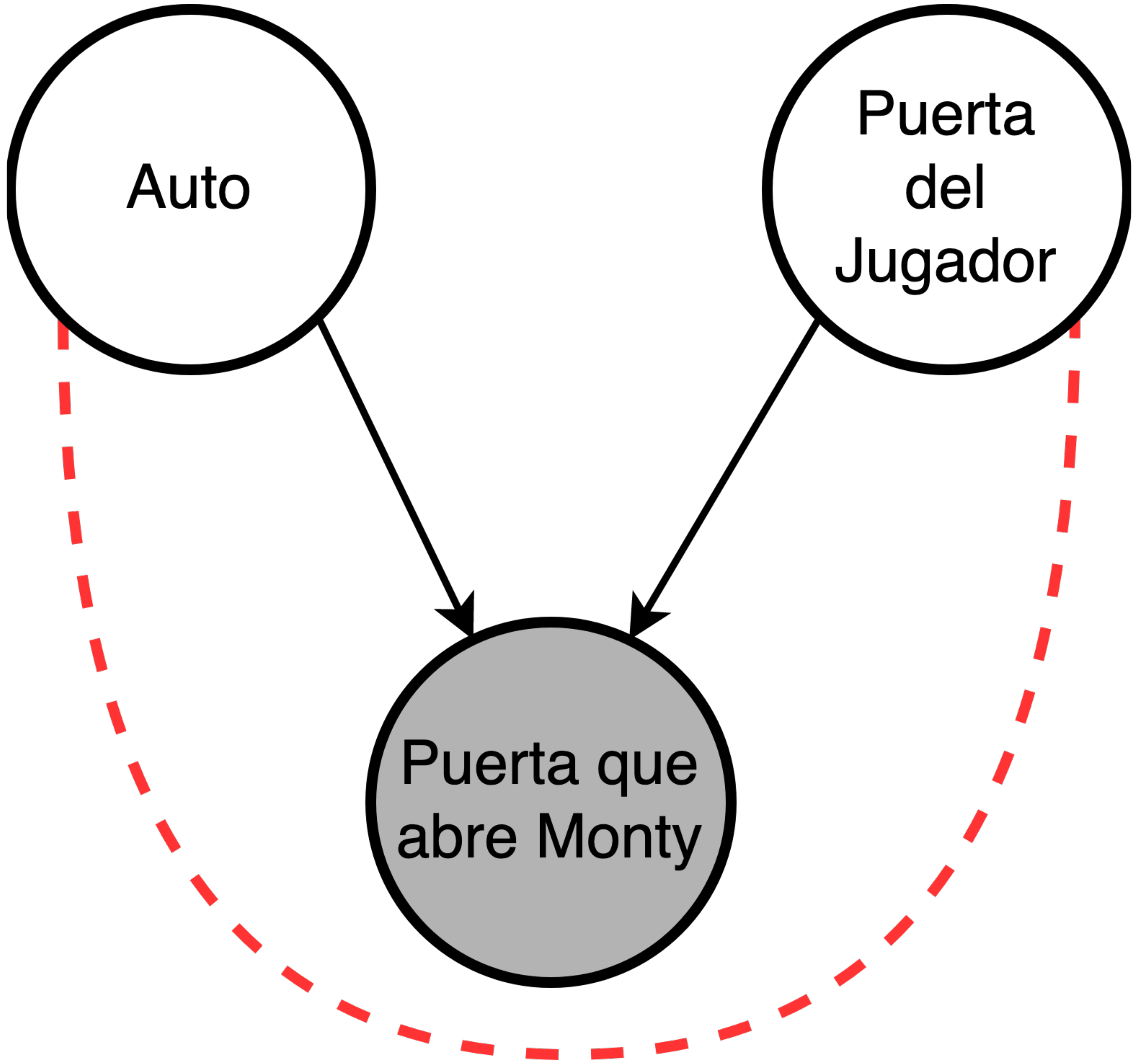
- A la variable Y le llamamos ***collider.***

- Si condicionamos en una variable collider, permitimos el pasaje del flujo de asociación.
- Éste fenómeno se le conoce como la paradoja de Berkson. (https://en.wikipedia.org/wiki/Berkson%27s_paradox)
- Cuando condicionamos en Y estamos filtrando los valores de la variable.
- Al variar X, necesariamente tiene que variar Z para mantener a Y en los valores filtrados que habíamos condicionado.
- Condicionar en los descendientes de un collider también permite el flujo de asociación.



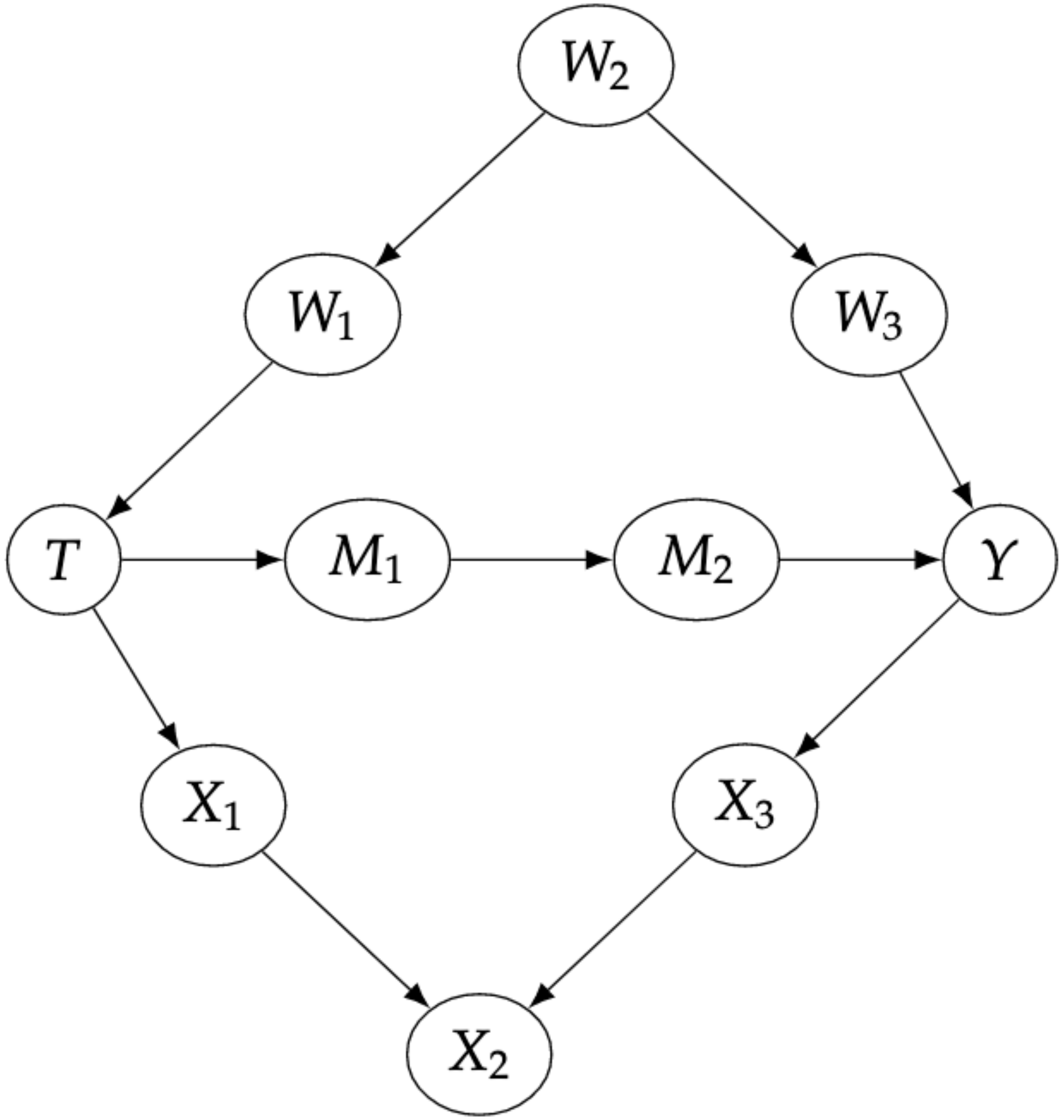
- El problema de Monty Hall:
    - Hay 3 puertas.
    - En una hay un auto.
    - En las otras dos hay una cabra.
- Elegís una puerta.
- El anfitrión abre otra puerta, revelando una cabra.
- Te dan la oportunidad de cambiar tu decisión original. ¿Lo haces?

- Nuestra probabilidad de acierto original era 1/3.
- Luego de que Monty abre la puerta y revela una cabra, cambiar de puerta eleva la probabilidad de ganar a 2/3.
- Al condicionar sobre la puerta (Monty revela la cabra) fluye información entre los nodos padres.



- A un camino entre nodos X e Y es ***bloqueado*** por un conjunto (puede ser vacio) de condicionamiento Z si:
  - En el camino hay una cadena $\ldots \rightarrow W \rightarrow \ldots$ o una bifurcación $\ldots \leftarrow W \rightarrow \ldots$, donde $W \in Z$
  - Existe un collider W en el camino que no es condicionado ($W \notin Z$) y ninguno de sus decendientes son condicionados (de$(W) \notin Z$)
- Un camino ***no-bloqueado*** es el complemento. La asociación fluye a través de los caminos no-bloqueados y no lo hace a través de los bloqueados.
- Dos conjuntos de nodos X e Y están ***d-separados*** por un conjunto de nodos Z si todos los caminos entre cualquier nodo de X y cualquier nodo de Y están bloqueados por Z.

- Están T y Y d-separados por:
  - ¿El conjunto vacio?
  - ¿W_2?
  - ¿$\{W_2, M_1\}$?
  - ¿$\{W_1, M_2\}$?
  - ¿$\{W_1, M_2, X_2\}$?
  - ¿$\{W_1, M_2, X_2, X_3\}$?



Source: Brady Neal - *Introduction to Causal Inference*

- La d-separación implica que la asociación es causalidad.
- Si dos variables T e Y están d-separadas, entonces no fluye asociación entre ellas que no sea causal.
- Visto de otra forma todo el efecto causal que sale de T llega a Y y no hay asociaciones de confusión entre ellas.