Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Práctico 4

1. Sean $u = (2, 1+i, i),\ v = (2-i, 2, 1+2i) \in \mathbb{C}^3$, con el producto interno habitual. Calcular $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$ y $\|v\|$ y verificar que se cumplen la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular.

2. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{k}$.

   a) Probar la *regla del paralelogramo*: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right), \quad \forall u, v \in V$.

   b) Probar las *fórmulas de polarización*:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right),\ \mathbb{k} = \mathbb{R}; \quad \langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{k=3} i^k \left\|u + i^k v\right\|^2, \quad \mathbb{k} = \mathbb{C}; \quad \forall u, v \in V.$$

3. En los casos siguientes, hallar una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, calcular los coeficientes de Fourier con respecto a la base $\mathcal{B}$ del vector v, y escribir v como combinación lineal de $\mathcal{B}$.

   a) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + y + z + t = 0\}$ con el producto escalar de $\mathbb{R}^4$ y $v = (1, 1, 1, -3)$.

   b) $V = [(1, i, 0), (1-i, 2, 4i)] \subset \mathbb{C}^3$ con el producto interno usual de $\mathbb{C}^3$ y $v = (3+i, 4i, -4)$.

4. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$.

   a) Probar que $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$ define un producto interno en V.

   b) Hallar una base ortonormal de V.

5. Se define $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $\langle (x, y), (x', y')\rangle = 2\, x\, x' + y\, x' + x\, y' + y\, y'$.

   a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   b) Hallar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal respecto a este producto interno.

6. Sea V un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base cualquiera de V. Definimos $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{k}$ por $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ si $v = \sum_{i=1}^n x_i\, v_i$ y $w = \sum_{i=1}^n y_i\, v_i$. Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ define un producto interno en V y que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal respecto a $\langle\ ,\ \rangle$.

7. Hallar explícitamente un producto interno en $\mathbb{R}^2$ para el cual $\{(2, 3), (1, 2)\}$ sea una base ortonormal.

8. Sean $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual y $W = [(1, 0, 1)]$. Hallar bases ortonormales de W y de $W^\perp$. Hallar explícitamente P_W y $P_{W^\perp}$.

9. Sea V un espacio con producto interno, $W \subset V$ un subespacio y $v \in V$. En los casos siguientes se pide: hallar $W^\perp$; hallar las proyecciones $P_W(v)$ y $P_{W^\perp}(v)$; calcular la distancia de v a W.

   a) $V = \mathbb{R}^2,\ W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4x\},\ v = (2, 6)$, con el producto interno habitual.

   b) $V = \mathbb{C}^3,\ W = [(1, i, 1-i), (i, 1+i, 2)],\ v = (0, 2i-1, 1+i)$, con el producto interno habitual.

   c) $V = \mathbb{R}_2[x],\ W = \mathbb{R}_1[x],\ p(x) = 4 + 3x - 2x^2$, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$.

   d) $V = M_2(\mathbb{R})$, W es el subespacio de las matrices simétricas, $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, con el producto interno del ejercicio 16*d*.

10. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio con producto interno V. Probar

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp; \quad W_1^\perp + W_2^\perp \subset (W_1 \cap W_2)^\perp.$$

Probar que si V es de dimensión finita, entonces $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$.

11. Sea V un espacio con producto interno y U, W subespacios de V.

   a) Probar $U \subset W$ implica $W^\perp \subset U^\perp$.

   b) Probar $W \subset W^{\perp\perp}$. Probar que si V es de dimensión finita[1], entonces $W = W^{\perp\perp}$.

12. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, W un subespacio de V y $v \in V \setminus W$. Probar que existe $z \in W^\perp$ tal que $\langle v, z\rangle \neq 0$.

13. Sea V un espacio vectorial con producto interno y W_1, W_2 subespacios tales que $V = W_1 \oplus W_2$ y $W_1 \perp W_2$ (es decir, $w_1 \perp w_2$, para todo $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$). Probar $W_1^\perp = W_2$ y $W_2^\perp = W_1$.

14. Se considera el espacio $V = C([-1,1]) = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua}\}$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$. Sean W_1 el subespacio de V formado por las funciones pares y W_2 el de las funciones impares. Probar $W_1^\perp = W_2$. *Sugerencia:* recordar que vale $V = W_1 \oplus W_2$.

15. Sea $l^2(\mathbb{R})$ el conjunto de las sucesiones reales (x_n) tales que la serie $\sum_n x_n^2$ converge. Escribimos $\sum_{n=0}^\infty x_n^2$ a la suma de la serie.

   a) Probar que $l^2(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales: si $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ entonces $x + y$ y λx ($\lambda \in \mathbb{R}$) están definidas por $x + y = (z_n)$, $\lambda x = (t_n)$, siendo $z_n := x_n + y_n$ y $t_n := \lambda x_n$, para todo $n \geq 0$. *Sugerencia:* para la suma, ver que vale $(x+y)^2 \leq 2\left(x^2 + y^2\right)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) Sean $x, y \in l^2(\mathbb{R})$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$. Probar que para todo $N \geq 0$ vale

   $$\left(\sum_{n=0}^N |x_n\, y_n|\right)^2 \leq \sum_{n=0}^\infty x_n^2 \sum_{n=0}^\infty y_n^2.$$

   Concluir que la serie $\sum x_n\, y_n$ es convergente.

   c) Probar que $\langle x, y\rangle := \sum_{n=0}^\infty x_n\, y_n$ define un producto interno en $l^2(\mathbb{R})$, donde $x = (x_n)$, $y = (y_n)$.

   d) Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideramos la sucesión $x^{(i)} = \left(x_n^{(i)}\right)_n$ definida por $x_i^{(i)} = 1$ y $x_n^{(i)} = 0$, para todo $n \neq i$. Sea W el subespacio de $l^2(\mathbb{R})$ generado por $\{x^{(i)} : i = 0, 1, \dots\}$. Probar $W \subsetneq W^{\perp\perp}$.

16. Para cada una de las siguientes funcionales $\alpha : V \to \mathbb{k}$, encontrar un vector w tal que $\alpha(v) = \langle v, w\rangle$ para todo $v \in V$.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $\alpha(x, y, z) = x - 2y + 4z$, con el producto interno usual.

   b) $V = \mathbb{C}^3$, $\alpha(x, y, z) = 2z - x + i(3x + y)$, con el producto interno usual.

   c) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha(p) = p(0) + p'(1)$, con el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p\, q$.

   d) $V = M_n(\mathbb{R})$, $\alpha(A) = \operatorname{tr}(A)$ (la traza), con el producto interno $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$, siendo $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$.

[1] La hipótesis de dimensión finita es necesaria; ver el ejercicio 15.