Mecánica cuántica 2022 POSGRADO. Dispersión.

5.
Considere la sección eficaz en el sistema de referencia de laboratorio y en el centro de masa, para una partícula 1 incidiendo sobre otra partícula 2 en reposo.
a. Calcule la expresión que relaciona el ángulo de salida de 1 con la dirección de incidencia, en ambos referenciales (θ y θ_L).
b. Muestre que la sección eficaz total en ambos referenciales es la misma, a partir del hecho de que esta es proporcional a la probabilidad de que una partícula incidente sea dispersada.
c. Calcule la relación entre las secciones eficaces diferenciales de ambos referenciales.

6.
a. Muestre que e^{ikr}/r es solución de la ecuación de Schrodinger sin potencial. En cambio, en presencia de un potencial V(**r**) y a orden $1/r$, en zonas lejanas ($r \to \infty$), la función $f(\theta,\varphi)e^{ikr}/r$ es solución de la ecuación de Schrodinger, asumiendo que el potencial V(**r**) decae con r más rápidamente que $1/r$.
b. Muestre que en este caso las partículas se dispersan radialmente: la densidad de corriente de probabilidad es, al orden menor en $1/r$, radial y únicamente tiene componente $\mathbf{j}_r$.
c. Demuestre que el número de partículas dispersadas en todas direcciones, a grandes distancias, no depende de r.

7.
Rutherford en 1911 descubrió el núcleo atómico usando la sección eficaz clásica. En forma accidental esta sección eficaz coincide con el cálculo cuántico, realizado más de una década después. Considere un haz de partículas α de 8 MeV dispersadas por una lámina fina de oro. Suponga que el haz es de 1 nA y la lámina tiene espesor de una micra. Asuma que la dispersión ocurre solamente con los núcleos y no con los electrones (¿en qué circunstancias es adecuada está hipótesis?). Asuma que cada partícula αes dispersada una sola vez (justifique esta hipótesis). Calcule la tasa de partículas α en un detector de ángulos $d\theta = d\varphi = 10^{-2}$ radianes, centrado en $\theta = \pi/2$. (busque en tablas la densidad y carga nuclear del oro).

8.
Calcule la sección eficaz diferencial y la total para el caso de un potencial de Yukawa $V(r) = V_0 \exp(- \alpha r)/r$ en la aproximación de Born.
b. Obtenga el resultado de Rutherford para el límite adecuado del parámetro.
c. Calcule también en la aproximación de Born las secciones eficaces para una potencial gaussiano y una esfera no rígida ($V(r) = - V_0$ si $r<r_0$, y cero en otro caso). Verifique que en todos los casos la sección eficaz es isótropa a bajas energías.
d. Verifique si se cumple el Teorema Óptico del ejercicio **4**.
e. Considere alguna definición de alcance de un potencial, y calcule el alcance para los casos anteriores, y en los límites de Rutherford y de esfera dura.

9.

a. Considere las dispersión de Rutherford (límite de potencial de Yukawa con alcance infinito) de partículas α de 10 MeV sobre una lámina de aluminio de 10 μm. Calcule la energía en el sistema de CM, el número de blancos de aluminio por cm^2 y la distancia de máximo acercamiento en una colisión frontal.

b. Si se mide en el LAB a 30^0, calcule en el CM el ángulo correspondiente y la distancia de máximo acercamiento. Compare esta con el radio del núcleo de aluminio. Calcule la sección efical diferencial para este ángulo, en el CM y en el LAB.

c. Si el ángulo sólido del detector es 10^{-6} estereorradianes calcule dσ y la probabilidad de que una partícula α sea dispersada en el detector (asumiendo eficiencia ideal).

d. Si el haz es de 10^{12} s^{-1} partículas, calcule cuántas partículas α llegan al detector por segundo. Calcule la luminosidad del haz con las datos anteriores.

10.

Estados ligados de una esfera blanda y resonancias de dispersión. Considere la dispersión por una esfera blanda, potencial $-V_0$ para $r < r_0$ y cero si $r > r_0$, siendo V_0 una constante positiva, en el caso de muy bajas energías, para ondas s (ℓ=0).

a. Considere estados ligados, E<0. Escriba la condición que verifica la energía de los estados ligados. Grafique y disculta la existencia de estados ligados, en particulas para potenciales muy débiles (defina $k_0=(2\mu V_0/\hbar^2)^{1/2}$, $\rho=(-2\mu E/\hbar^2)^{1/2}$ y $K = \sqrt{k_0^2 - \rho^2}$).

b. Ahora, para la dispersión (E > 0, y definiendo $k=(-2\mu E/\hbar^2)^{1/2}$ y $K' = \sqrt{k_0^2 + k^2}$), escriba y resuelva la ecuación radial. Elija el coeficiente de la función $u_{k,0}(r)$ para $r > r_0$ como igual a 1, y calcule el coeficiente de $u_{k,0}(r)$ para $r < r_0$. Muestre que el corrimiento de fase es $\delta_0 = -kr_0 + \alpha(k)$, $\tan\alpha(k) = \frac{k}{K'}\tan K' r_0$.

c. Grafique el coeficiente al cuadrado (ya calculado) de $u_{k,0}(r)$ para $r > r_0$ como función de k. Muestre que tiene máximos y el valor de $\alpha(k)$ para esos valores. Muestre además que si existe una resonancia en el caso $kr_0 << 1$ la contribución de la onda s a la sección eficaz total es prácticamente máxima.

d. Relación entre resonancias y estados ligados: muestre que si $kr_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \epsilon$, con $\epsilon \ll 1$ y positivo, entonces existe un estado ligado con $E = -\hbar^2\rho^2/2\mu$, y $\rho \approx \epsilon k_0$.

e. Muestre que si $\epsilon \ll 1$ y negativo, existe una resonancia de dispersión con energía $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ y $k^2 \approx 2\frac{k_0\epsilon}{r_0}$. Deduzca de esto que si el potencial disminuye en profundidad, manteniendo r_0 fijo, el estado ligado que desaparece cuando $k_0 r_0$ pasa por un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ da lugar a una resonancia de dispersión de baja energía.