Determinantes

Matriz cuadrada $\longrightarrow$ número

A $\qquad$ $\det A$ o $|A|$

tamaño $n \times n$ $\qquad$ (determinante de A)

Fórmula: depende de n

1×1: $\quad \det(a) = a$

2×2: $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underline{ad} - \underline{bc}$

3×3: Sarrus, desarrollo. (fila/columna)

$n \times n$: desarrollo.

Propiedad: A invertible $\longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Recordar: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible $\longleftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

(caso 2×2)

Nos da un criterio para ver si A es invertible.

Util si A tiene parámetros.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 1 - \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ λ parámetro

¿Qué valores de λ hacen que A sea invertible?

$$\det A = \lambda(\lambda - 1) - 2(1 - \lambda)$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 + 2\lambda = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$\underline{A \text{ invertible}} \iff \lambda^2 + \lambda - 2 \neq 0 \iff \underline{\lambda \neq 1, -2}$

Determinantes 3x3: Regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 4 + 0 - (-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} - 0$$

$$\begin{array}{cccc} - & & & + \\ - & 2 & 0 \quad 4 & + \\ - & 1 & 1/2 \quad 1/2 & + \end{array}$$

$$= 2 + 4 + 4 - 1$$

$$= \underline{\underline{9}}$$

Propiedad: A invertible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ a, b, c parámetros

$$\begin{matrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \end{matrix}$$

$$\det A = 6a + 2c + 0 - 0 - 10a + 2b$$

$$= -4a + 2b + 2c$$

Verifico que A no invertible $\Rightarrow$ det A = 0

Casos simples:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad -4\underset{0}{\underset{=}{a}} + 2\underset{0}{\underset{=}{b}} + 2\underset{0}{\underset{=}{c}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad -4\underset{1}{\underset{=}{a}} + 2\underset{-3}{\underset{=}{b}} + 2\underset{5}{\underset{=}{c}} = -4 - 6 + 10 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad -4\underset{0}{\underset{=}{a}} + 2\underset{2}{\underset{=}{b}} + 2\underset{-2}{\underset{=}{c}} = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & -3\lambda & 5\lambda \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad -4\underset{\lambda}{\underset{=}{a}} + 2\underset{-3\lambda}{\underset{=}{b}} + 2\underset{5\lambda}{\underset{=}{c}}$$

$$= -4\lambda - 6\lambda + 10\lambda = 0$$

Ejemplo con A invertible:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad -4\underset{0}{\underset{=}{a}} + 2\underset{0}{\underset{=}{b}} + 2\underset{1}{\underset{=}{c}} = 2 \neq 0.$$

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$