Desarrollo por fila / columna

Primero 3 x 3

Recordar: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4a + 2b + 2c$

(Sarrus)

<u>Menores</u> <u>Complementarios</u> de A (3 x 3)

Determinantes que se obtienen tachando <u>una fila</u> y <u>una columna</u> de A (queda 2 x 2)

Lugar (i, j): tacho <u>fila</u> i y <u>columna</u> j

Ej:

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

M. C. del lugar (1, 1):

$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 10 = \underline{-4}$

<u>Observar:</u> $\underline{\underline{-4}}\,a + 2b + 2c$ $+$

lugar (1, 2):

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2}}$

Observo: $-4a + \underline{\underline{2}}b + 2c$ $\ominus$

lugar $(1,3)$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{2}}$$

Obs: $-4a + 2b + \underline{\underline{2}}c$ $\oplus$

Signo del lugar (i,j): $i+j \to$ par $+$, impar $-$

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & i+j \text{ par} \\ -1 & i+j \text{ impar} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Desarrollo por $1^{\underline{ra}}$ fila:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = +a \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}_{-4} - b \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}_{-2} + c \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{2}$$

$$= -4a + 2b + 2c$$

Adjunto de A en el lugar (i,j) :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \times \text{Menor Comp. } (i,j)$$

Desarrollo por una fila (fila 1)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = a \underbrace{A_{11}}_{-4} + b \underbrace{A_{12}}_{2} + c \underbrace{A_{13}}_{2}$$

Ejemplo: $2^{\underline{da}}$ fila

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad = (6-2) - (-3-1)$$

$$= 4 - (-4) = 8 \checkmark$$

$1^{\underline{er}}$ columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad = 3 \cdot (2+1) + (1-2) =$$

$$= 9 - 1 = 8 \checkmark$$

Teorema: Puedo calcular $\det A$ desarrollando por cualquier fila o columna de A

3×3: Dá lo mismo que Sarrus

$n\times n$: Todos los desarrollos (por fila o columna) dan el mismo resultado.

$\rightarrow$ defino $\det A$ como el número obtenido de un desarrollo por fila o columna

(no lo demostraremos)

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 5A_{33} + A_{34}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

A_{33}:

$+$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & \cancel{2} & 1 \\ 0 & 1 & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{1} \\ 1 & -2 & \cancel{0} & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= -0 + 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-1) - (6-0)$$

$$= -4 - 6 = -10$$

$$A_{33} = -10$$

A_{34} : $-$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 0 + 0$$

$$= -2$$

$$A_{34} = -(-2) = 2$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\underbrace{A_{33}}_{-10} + \underbrace{A_{34}}_{2} = -50 + 2$$

$$= -48$$

Ejemplo: Matriz diagonal $\underline{n} \times \underline{n}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

parámetros

$n = 2$ $\quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $\quad \det D = \lambda_1 \lambda_2$

$$\det D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_3 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{vmatrix}}_{(n-2)\times(n-2)} = \cdots = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Caso especial: $\quad I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det I = 1$