Propiedades del determinante

① Intercambiar dos filas:

cambia el signo del determinante

2×2 :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$\ominus$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc)$$

3×3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$\ominus \qquad \ominus \qquad \ominus$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} h & i \\ e & f \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} g & i \\ d & f \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} g & h \\ d & e \end{vmatrix}$$

$\ominus$

4×4 : sale del caso 3×3

(desarrollando por una fila que no estoy intercambiando)

5×5 : del 4×4, y así.

Linealidad respecto a cada fila

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5a - 2b \quad \leftarrow \text{ función lineal de } (a, b)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a\underbrace{A_{11}}_{9} + b\underbrace{A_{12}}_{5} + c\underbrace{A_{13}}_{7}$$

$$= 9a + 5b + 7c \quad \leftarrow \text{ función lineal de } (a, b, c)$$

Lo mismo en tamaño $n \times n$.

(2) Multiplicar una fila por un número λ:
el determinante se multiplica por λ

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\lambda a - 2\lambda b = \lambda(\underline{5a - 2b})$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Recordar: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 9a + 5b + 7c$

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 9\lambda a + 5\lambda b + 7\lambda c$$

$$= \lambda\,(\underline{9a + 5b + 7c})$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

Concluyo: $\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

Lo mismo para cualquier fila / tamaño $n \times n$

③ El determinante es distributivo respecto a la suma en cada fila:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5(a_1 + a_2) - 2(b_1 + b_2)$$

$$= \underline{5a_1 - 2b_1} + \underline{5a_2 - 2b_2}$$

Fila 1: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2)$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$9(a_1 + a_2) + 5(b_1 + b_2) + 7(c_1 + c_2) =$$

$$= \underline{9a_1 + 5b_1 + 7c_1} + \underline{9a_2 + 5b_2 + 7c_2}$$

Vale para cualquier fila y en tamaño $n \times n$

Consecuencia de ③: Si sumo a una fila un múltiplo de otra: se mantiene el mismo determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} \lambda$$

$$\begin{vmatrix} a+\lambda & b-6\lambda & c+3\lambda \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & -6\lambda & 3\lambda \\ 1 & -6 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}_{=0}$$

Fila 1: $(a,b,c) + (\lambda, -6\lambda, 3\lambda)$

$F1 = \lambda F2$

(no invertible)

Propiedades ①, ② y ③ (Consecuencia)

$\longrightarrow$ Determinantes por método de Gauss

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1/7 & 2/7 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{7} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{7} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} -3 = -\frac{4}{7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} -1$$

$$= -\frac{4}{7}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{4}{7}\; 1\cdot(-1)\cdot(-3)$$

$$= -\frac{4}{7}\cdot 3 = -\frac{12}{7}$$

//