Propiedades del determinante (parte 2).

Si $A \in M_n$, escribimos $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix}$ filas de A

Si B es otra matriz $n \times n$ se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \hline A_2 B \\ \hline \vdots \\ \hline A_n B \end{pmatrix}$$

Cada fila de A se multiplica por B.

<u>Teorema</u>: El determinante de matrices $n \times n$ es la única función de M_n en $\mathbb{R}$ que verifica:

(i) Es lineal en las filas.

$$\det \begin{pmatrix} A_1 + cA_1' \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix} + c \det \begin{pmatrix} A_1' \\ \hline A_2 \\ \hline \vdots \\ \hline A_n \end{pmatrix}$$

(ii) Cambia de signo al intercambiar dos filas.

(iii) Vale 1 en la matriz identidad.

$\boxed{\text{Trasposición}}$ $A \in M_{m \times n}$ su matriz traspuesta es la matriz $n \times m$ que se obtiene a partir de A intercambiando filas por columnas.

La matriz traspuesta de A se denota por A^t.

Si escribimos $A=(a_{ij})$ $\quad i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

entonces

$$A^t=(a^t_{ij}) \quad \text{con} \quad a^t_{ij}=a_{ji} \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m \end{array}$$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedades (Fáciles de verificar):

- $(A^t)^t = A$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ (A+B)^t = A^t + B^t \\ \bullet\ (cA)^t = c\,A^t \end{array}\right\} \to \text{linealidad}$$

- $(AB)^t = B^t A^t$ $\quad$ (se cambia el orden).

Proposición: Para toda matriz cuadrada se cumple $\det(A^t) = \det(A)$.

Esto es equivalente a decir que el desarrollo por filas o por columnas en el cálculo del determinante dan el mismo resultado.

El determinante y el producto

Si bien $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ en general. Por ejemplo

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

sin embargo

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Se tiene lo siguiente.

Teorema: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

siempre que A y B sean matrices cuadradas del mismo tamaño.

Para demostrar este teorema necesitamos varias cosas.

1) A es invertible $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Esto se puede demostrar usando la forma escalerizada de A.

2) Si $\det(B) = 0$, entonces $\det(AB) = 0$

Esto se demuestra usando 1) ya que si B no es invertible AB tampoco lo es.

3) Si $\det(B) \neq 0$ se define una función que asigna un número a cada $A \in M_n$ de la siguiente manera:

$$A \in M_n \longrightarrow \frac{\det(AB)}{\det(B)}$$

Esta función verifica

- Es lineal en las filas de A
- Cambia de signo si intercambiamos filas de A
- Vale 1 en la matriz identidad.

Por lo tanto esta función debe ser el determinante.

Entonces

$$\frac{\det(AB)}{\det(B)} = \det(A)$$

de donde

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Corolario 1: A invertible $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Dem: $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$

Por el teorema $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$.

Entonces $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$.

Corolario 2: Si A es invertible se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \check{A}$$

siendo

$$\check{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

A_{ij} = determinante adjunto que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de A (cofactor ij). Recordar que hay un signo $(-1)^{i+j}$ en estos determinantes.

Cálculo de inversas.

Operaciones elementales en filas:

I. Sumarle a una fila un múltiplo de otra.

II. Intercambiar dos filas.

III. Multiplicar una fila por un número no nulo.

(Vamos a considerar sólo matrices cuadradas)

La operación I no cambia el determinante de la matriz, la operación II sólo le cambia el signo y la operación III multiplica el determinante por un número.

Con las operaciones I y II podemos escalerizar cualquier matriz.

$\Rightarrow$

det. matriz escalerizada $= \pm$ det. matriz original

$\Rightarrow$ Una matriz es invertible sii el sistema homogéneo asociado es C.D. sii su forma escalerizada tiene todas sus entradas diagonales no nulas sii el det $\neq 0$.

También podemos hacer operaciones elementales en columnas. Esto equivale a hacer las operaciones elementales en la traspuesta de la matriz y luego volver a trasponer.

$A \in M_n$ matriz cuadrada cualquiera

$A \xrightarrow[\text{I y II}]{\text{ops. de tipo}} E$ matriz escalonada

$\xrightarrow{\text{ops. de tipo I}} D$ matriz diagonal

Si A es invertible D es invertible, y realizando operaciones de tipo III la podemos convertir en la identidad. Esto nos da un algoritmo para calcular la inversa.

Veamos esto mediante un par de ejemplos.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3 \qquad A^{-1} = ?$$

Ops. en filas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad ① \leftrightarrow ②$$

$$A \qquad\qquad\qquad I$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad ③ - ①$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad ③ + \tfrac{1}{3}②$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1/3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Forma escalerizada.

Los números de la diagonal son $\neq 0$

$\Rightarrow$ A es invertible.

Además $\det A = -1 \times 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 4 \neq 0$

Podemos continuar para calcular A^{-1}:

$① + \frac{3}{4}③$

$② - \frac{3}{4}③$

Obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 3 & 0 & 3/4 & 3/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & -4/3 & 1/3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Para obtener la identidad a la izquierda hay que hacer $\frac{1}{3}$ 2 y $-\frac{3}{4}$ 3.

Llegamos a

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{I}\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} 1/4 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -3/4 \end{array}\right)}_{A^{-1}}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -3/4 \end{pmatrix}}.$$

Sea ahora $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad ③ + ①$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad ③ - ②$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Forma escalerizada.

Tiene un 0 en la diagonal

$\Rightarrow$ A no es invertible.

Además $\det(A) = 0$.