

# CTE II

## Estructura Estelar

---

Cecilia Mateu

Instituto de Física, Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

# ¿Cómo conocemos las Propiedades de la Estrellas?

---

- **Propiedades Extrínsecas:**

- **Posición:** Angular + Distancia (Paralaje)
- **Velocidad:** Movimiento Propio + Velocidad Radial (Doppler)

- **Propiedades Estelares (Intrínsecas):**

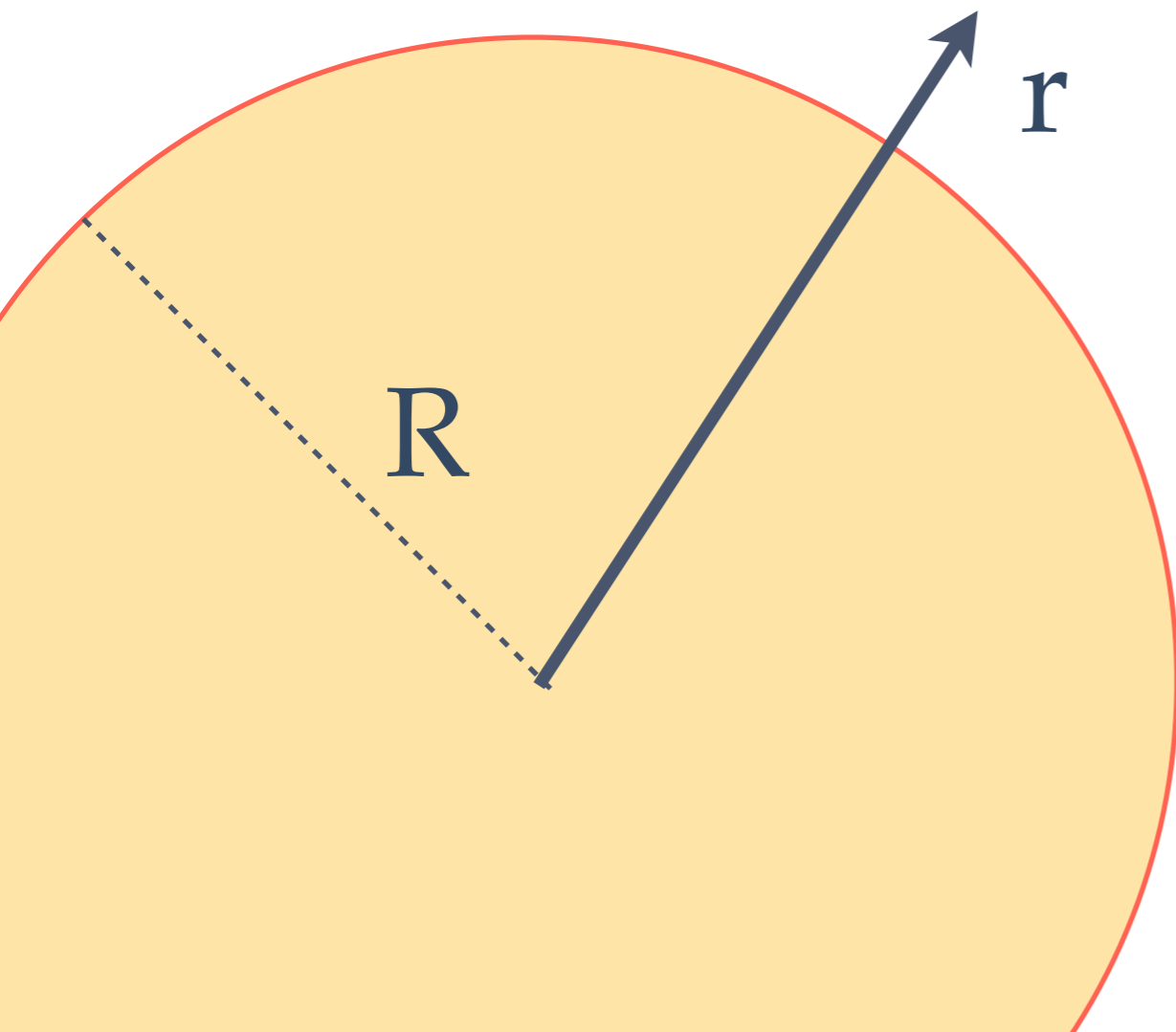
- **Temperatura:** color-Teff, ajuste del continuo o Ley de Wien
- **Luminosidad:**  $F = L/(4\pi d^2)$
- **Radio:**  $L = \sigma T^4(4\pi R^2)$
- **Masa:** Sistemas Binarios + 3º Ley de Kepler

# Estructura Estelar

# ¿Qué es una estrella?

---

- Un objeto sujeto por auto-gravedad y que irradia la energía suministrada por una fuente interna propia

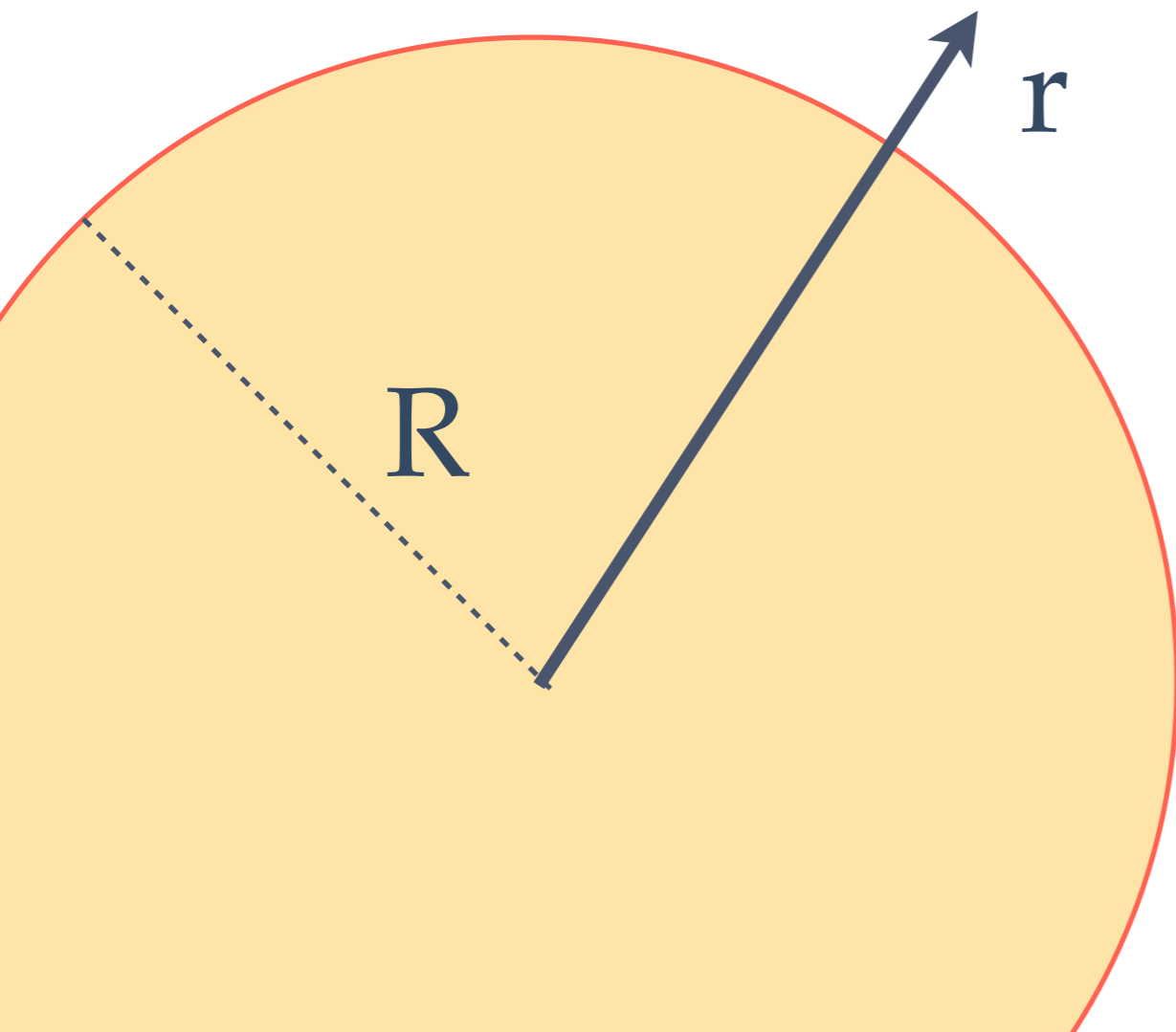


- Simetría esférica:
  - Descripción en 1D: dirección radial
  - Excepciones: estrellas con alta rotación o campos magnéticos fuertes
- Estructura:
  - Estado de las variables físicas que determinan el interior estelar (Presión, Temperatura, Densidad/Masa)
  - Modelo de estructura: Descripción de las variables  $T, P, \rho$  como función de la distancia radial al centro de la estrella y de los procesos físicos involucrados

# Estructura Estelar

---

- Sabemos que los fotones que recibimos de una estrella provienen de su fotosfera (superficie), entonces...
- ¿Cómo sabemos cómo es la estructura interna?
  - Modelamos los procesos físicos que ocurren en el interior usando las leyes de la física que conocemos
  - Un modelo nos da una predicción de observables, en función de lo que ocurre en el interior
  - Comparamos estas predicciones con datos observados --> el mejor modelo es el que mejor reproduce las observaciones
  - Se hacen + predicciones con cada modelo, se refina el modelo



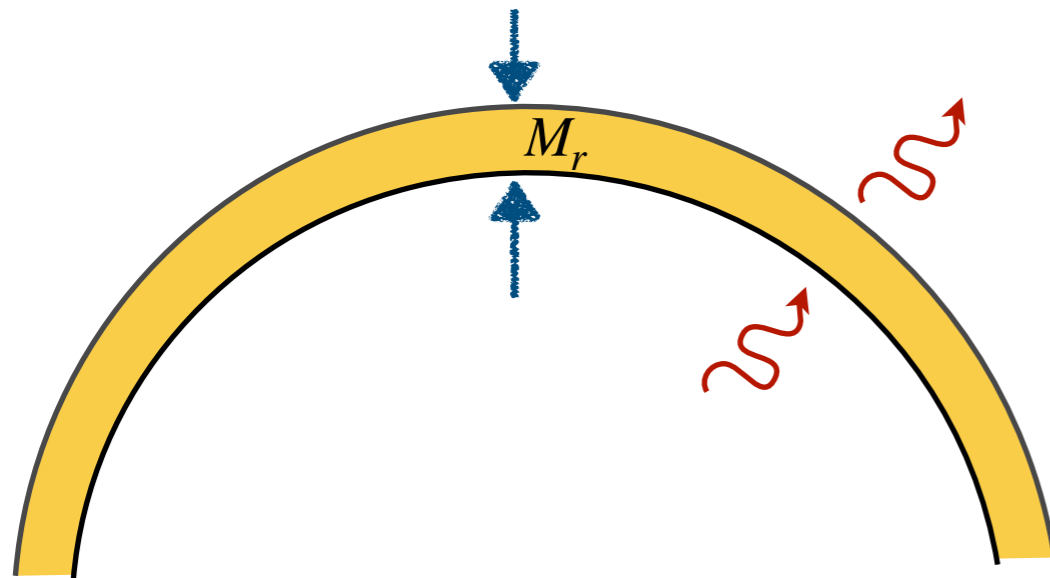
# ¿Porqué decimos que las estrellas evolucionan?

---

- **Empíricamente:** Se ha visto evolucionar a unas pocas estrellas (ej: supernovas)
- **Conceptualmente:** Las estrellas emiten energía y ésta no puede ser infinita.
- Por lo tanto, llegará el momento en que se agotará la fuente de energía y la estrella sufrirá cambios. Lo que queremos es entender ¿cuáles son, cómo y cuándo ocurren estos cambios?

# Ingredientes de un modelo de estructura

---



## Leyes de Conservación

- Ecuación de Continuidad  
(Conservación de la masa)
- Ecuación de Equilibrio Hidrostático  
(2º Ley de Newton)
- Ecuación de Equilibrio Térmico  
(Conservación de la Energía)

## Producción de Energía

## Ecuación de Estado

- Ecuación de Estado del Gas  
(depende del tipo de gas)

## Ecuación de Transporte

- Ecs. Transferencia radiativa/convectiva

**Leyes de conservación +  
Producción de Energía +  
Ecuación de estado +  
Transporte  
= Modelo de estructura**

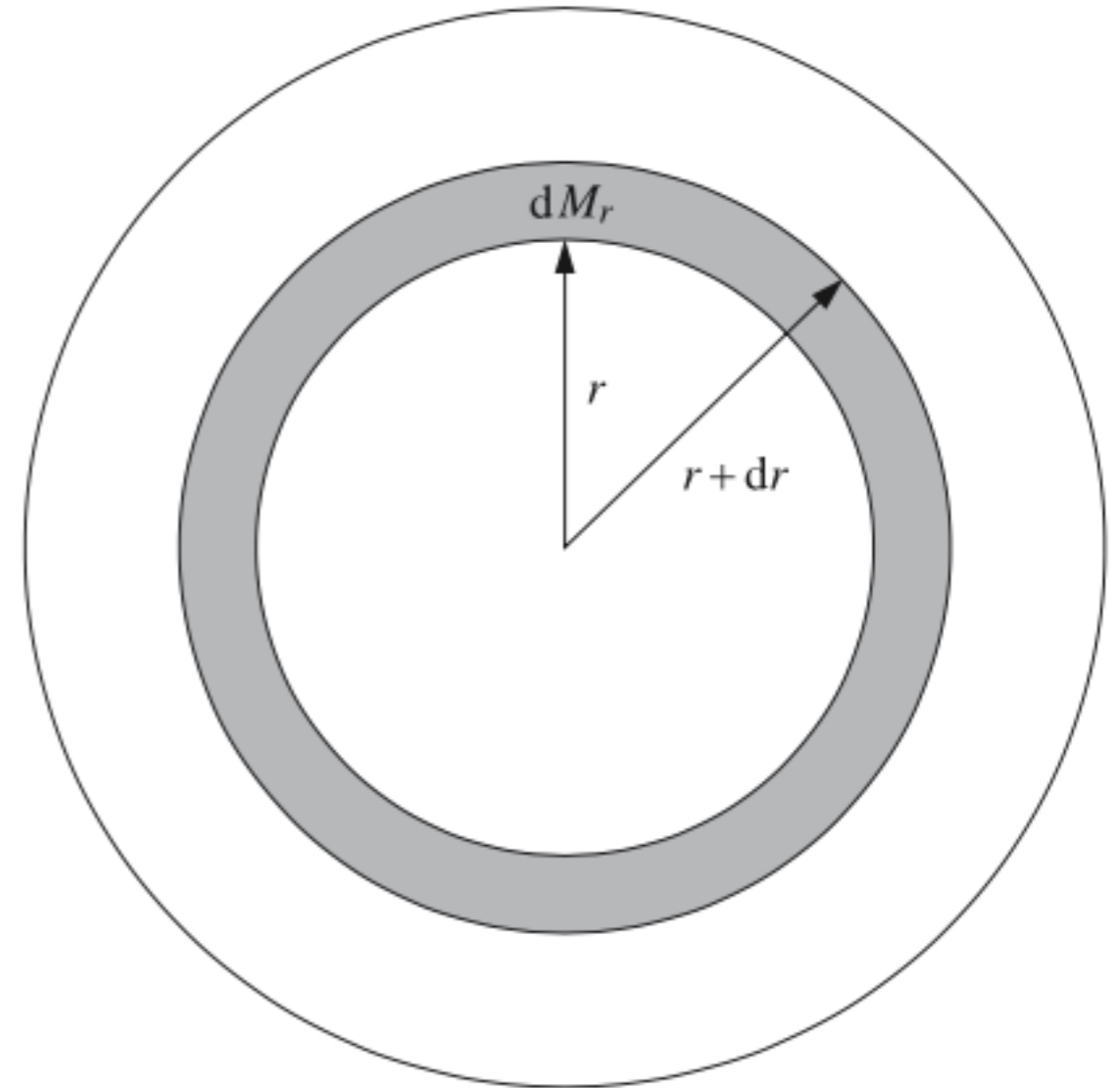
# Ecuación de Continuidad

- Tomamos un cascarón de radio  $r$  y espesor  $dr$  en el interior de la estrella
- Tomemos  $M_r$  como la masa encerrada a un radio  $r$ , así la masa del cascarón es

$$dM_r = \rho(r)dV$$

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

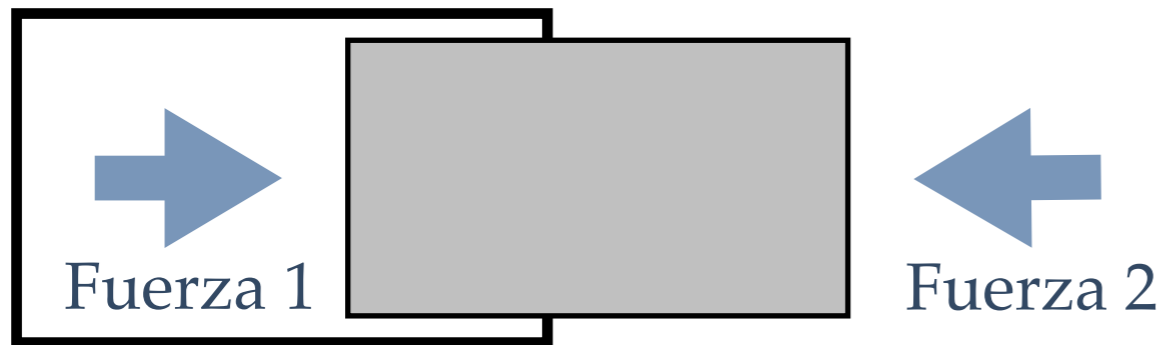


$\rho(r)$  es la densidad de masa



# Equilibrio Hidrostático

- Una analogía útil es la de un pistón

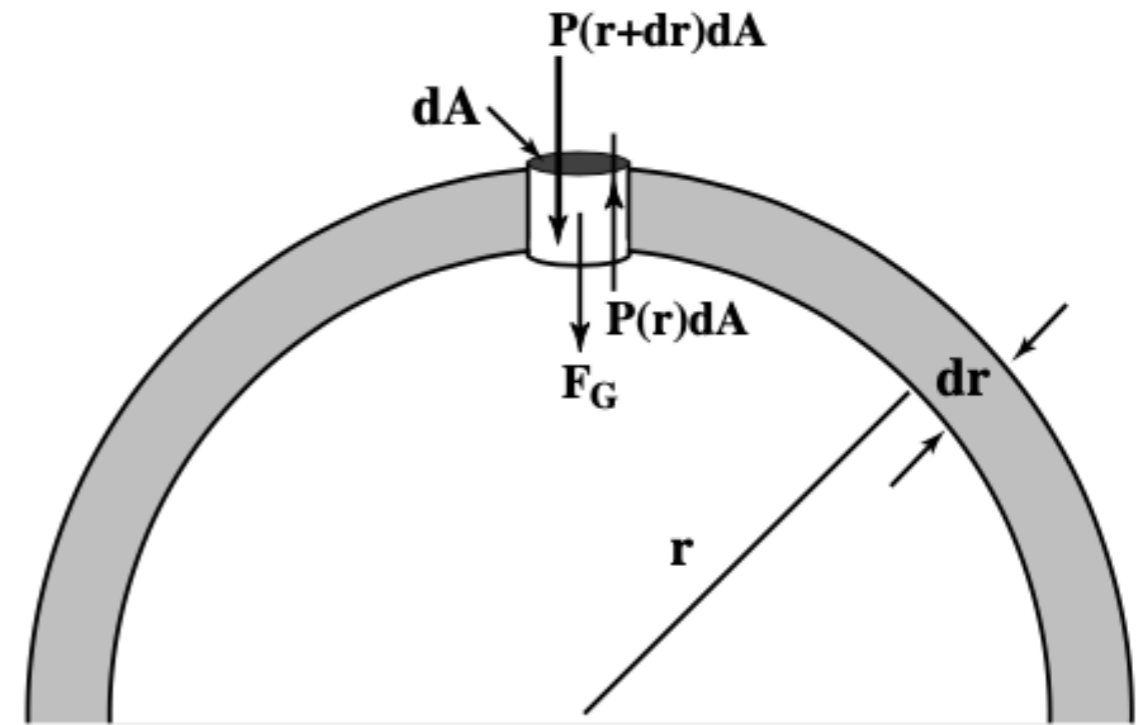


- Hagamos el balance de fuerzas para un elemento de masa  $dm$ , área  $dA$  y altura  $dr$  en el cascarón

- Éste siente una fuerza gravitatoria:

$$F_G = -\frac{GM_r dm}{r^2} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) dA dr$$

- Y está sujeto a la presión de la capa más externa (hacia adentro) más la de la capa interna (hacia afuera)



$$F_B = P(r)dA - P(r + dr)dA = -dP dA$$

# Equilibrio Hidrostático

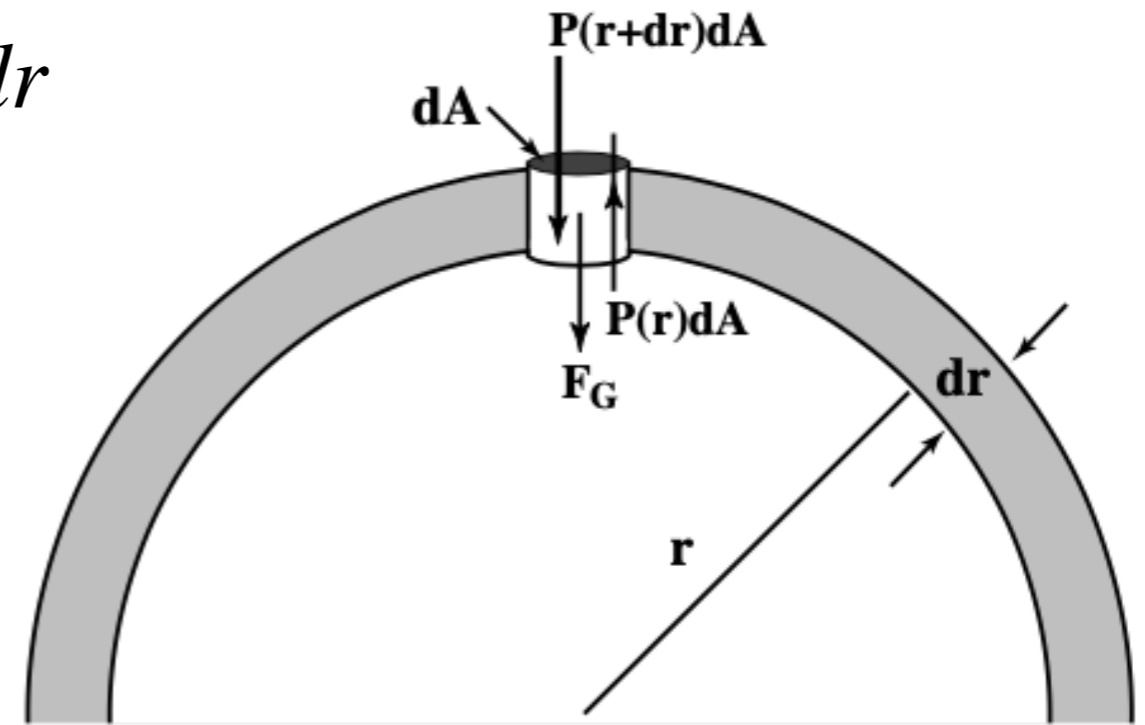
$$dF_G = -\frac{GM_r dm}{r^2} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) dA dr$$

$$dF_B = -dP dA$$

- La condición de Equilibrio es que la fuerza neta total sea nula:

$$dF_G + dF_B = 0$$

$$-\frac{GM_r}{r^2} \rho(r) dA dr - dP dA = 0$$



Ecuación de Equilibrio Hidrostático

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)$$

$\rho(r)$  creciente hacia el centro =>  
**gradiente de presión positivo**  
(hacia afuera)

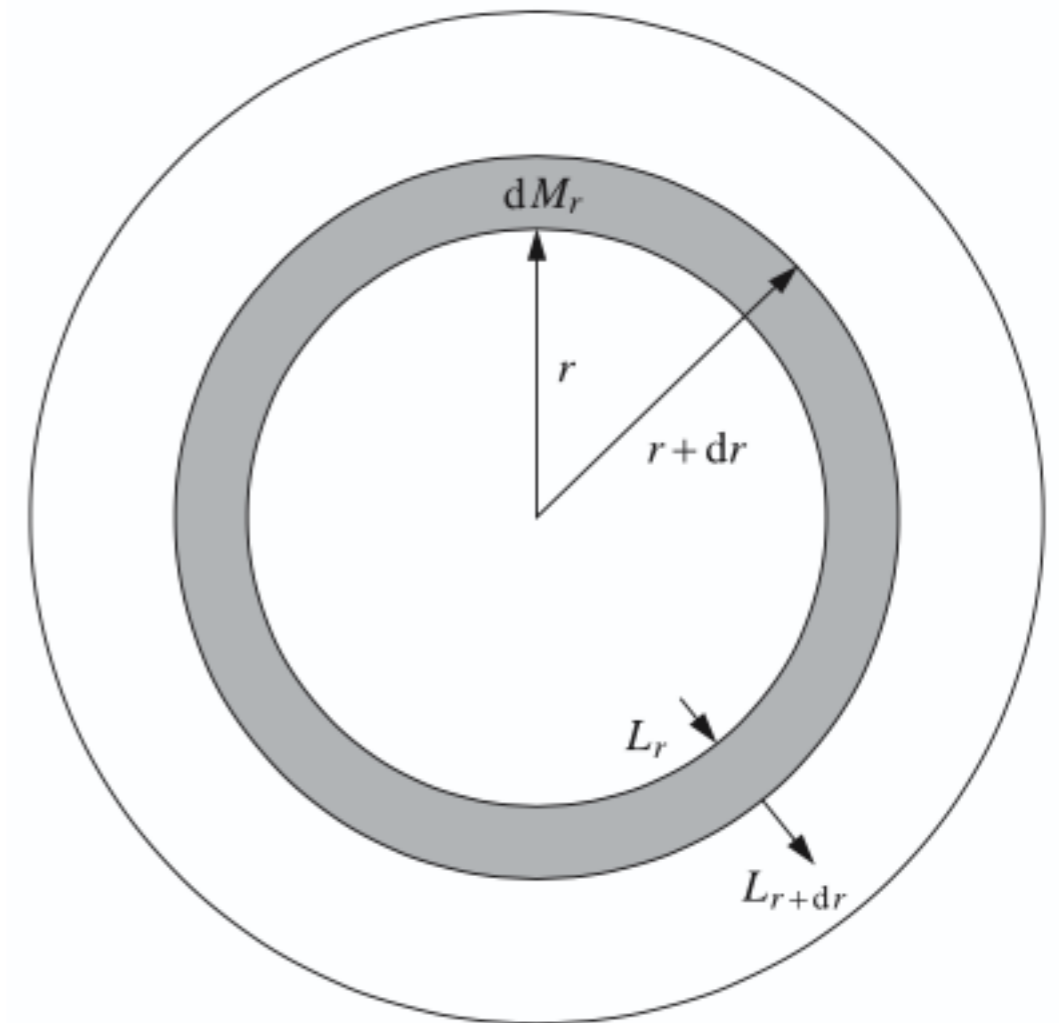
# Equilibrio Térmico y Producción de energía

- Conservación de la energía => la energía producida en el interior con una tasa de producción de energía  $\varepsilon(r)$  por unidad de masa, y ésta va hacia la superficie y es radiada hacia afuera

$$dL_r = L(r + dr) - L(r) = \varepsilon dM_r$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \rho(r)$$



de la física nuclear

La energía se produce casi exclusivamente en el núcleo así que  $L_r$  es casi constante

# Ecuación de Transporte

- Ésta ecuación nos dará el cambio de Temperatura con el radio, i.e. el *gradiente de Temperatura*
- La forma de la ec. depende de cuál es mecanismo de transporte. Hay tres posibles: *conducción*, **radiación o convección** (la *conducción es muy ineficiente en estrellas normales*-> sólo importante en obj. compactos)
- Cuál es el mecanismo de transporte dominante depende de  $P$  y  $\rho$ . Un estrella puede tener un interior **totalmente convectivo** (estrellas de baja masa  $M < 0.5 M_{\text{sol}}$ ), **mixto con una zona radiativa y otra convectiva** (estrellas como el Sol), o **totalmente radiativo** (estrellas masivas  $M \gtrsim 5 M_{\odot}$ )



Radiación



# Ecuación de Transporte: Transferencia Radiativa

---

Energía radiada por una capa de radio  $r$ :

$$F(r) = \sigma T^4 \quad dF(r) = 4\sigma T^3 dT \quad (1)$$

para un medio con una opacidad  $\kappa(r)$  dada, la ec. de transferencia radiativa es:

$$dF(r) = -\kappa(r)\rho(r)F(r)dr$$

opacidad  $\kappa(r)$  = cuánta radiación es absorbida por unidad de masa (Ver Cap. 5 Kartunnen, Ec. 5.44)

sustituyendo (1) y  $F(r)$  en términos de la luminosidad  $L_r$ :

$$4\sigma T^3 dT = -\kappa(r)\rho(r)\frac{L_r}{4\pi r^2}dr$$

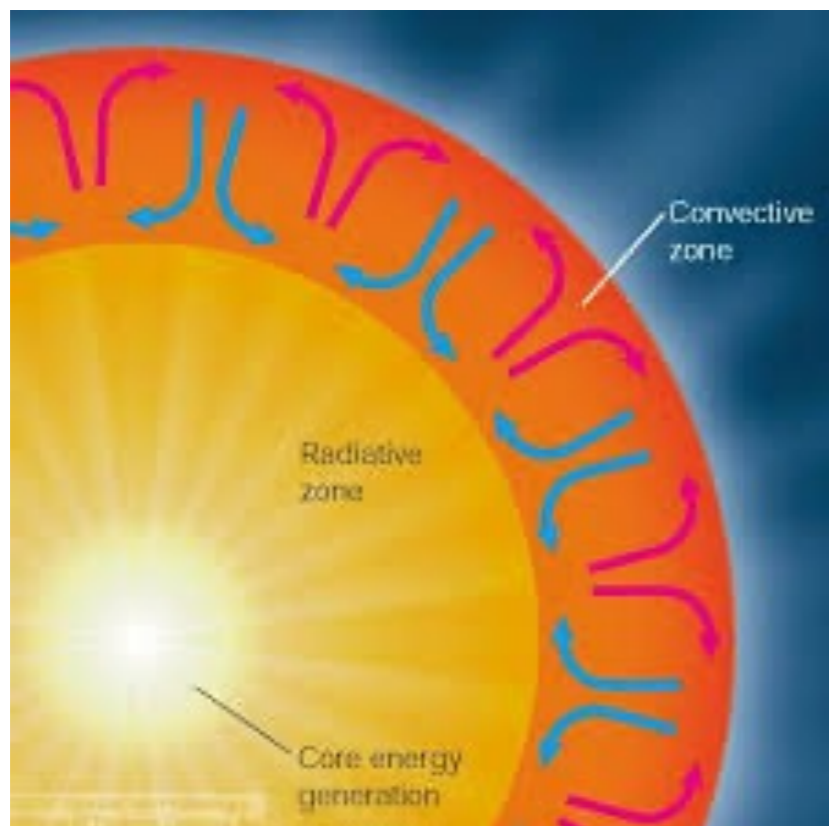
$$L_r = -\frac{16\pi r^2 \sigma T(r)^3}{\kappa(r)\rho(r)} \frac{dT}{dr}$$

Para que la estrella radíe tiene que haber un gradiente de  $T$  negativo ( $T$  aumenta hacia el centro)

# Ecuación de Transporte: Transferencia Convectiva

---

- Cuando la transferencia radiativa es ineficiente el transporte se vuelve **convectivo**
- Movimientos macro del gas en el que celdas/burbujas de gas caliente suben hacia capas más altas y frías, caléntandolas y perdiendo energía, haciendo que vuelvan a *sumergirse* (bajar hacia el centro)



$$\frac{dT}{dr} = \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

$\gamma$  se llama exponente adiabático, depende del calor específico del gas a P y V constante

# Ingredientes de un modelo de estructura

## Leyes de Conservación

- Ecuación de Continuidad (Conservación de la masa)  $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Hidrostático (2° Ley de Newton)  $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Térmico (Conservación de la Energía)

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \rho(r)$$

**Producción de Energía**

Sistema acoplado de ec. diferenciales

## Ecuación de Estado

- Ecuación de Estado del Gas (depende del tipo de gas)

## Ecuación de Transporte

- Ecs. Transferencia radiativa/convectiva

$$L_r = -\frac{16\pi r^2 \sigma T(r)^3}{\kappa(r) \rho(r)} \frac{dT}{dr} \quad \frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

**Leyes de conservación +  
Producción de Energía +  
Ecuación de estado +  
Transporte**

**= Modelo de estructura**

# Ecuación de Estado

---

- Relaciona la Presión, Temperatura y Densidad del gas
- Hay diferentes Ecuaciones de Estado que rigen gases en diferentes condiciones de P, T y densidad

- **Gas Ideal** (gas en el que las partículas no interactúan entre sí)

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T$$

- Válido en el interior del sol, fotosfera e interiores de la mayoría de las estrellas
- A temperaturas muy altas hay que sumar la contribución de la presión de radiación  $P_{rad} = aT^4/3$  (los fotones ejercen presión por intercambio de momento)

$$P = \frac{k}{\mu m_H} \rho T + \frac{1}{3} a T^4$$



# Ecuación de Estado

---

- A muy altas densidades los gases se pueden volver degenerados
- El Principio de Exclusión de Pauli (Mec. Cuántica) implica que dos fermiones no pueden estar en el mismo lugar y tener el mismo momentum => un cierto N de fermiones en un volumen ocupará todos los estados de momentum posibles hasta cierto valor máximo (Momento de Fermi)

- **Gases de electrones degenerados (relativista y no-relativista)**

$$P \approx \left( \frac{h^2}{m_e} \right) \left( \frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{5/3}$$

- ejemplos: Enanas blancas, interior de enanas marrones

- **Gases de Neutrones degenerados**

- ejemplos: Estrellas de Neutrones y Púlsars

# Ingredientes de un modelo de estructura

## Leyes de Conservación

- Ecuación de Continuidad (Conservación de la masa)  $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Hidrostático (2° Ley de Newton)  $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)$

- Ecuación de Equilibrio Térmico (Conservación de la Energía)

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \varepsilon(r) \rho(r)$$

**Producción de Energía**

## Ecuación de Estado

Gas Ideal                      e- degenerados  
n degenerados

## Ecuación de Transporte

- Ecs. Transferencia radiativa/conectiva

$$L_r = -\frac{16\pi r^2 \sigma T(r)^3}{\kappa(r) \rho(r)} \frac{dT}{dr} \quad \frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

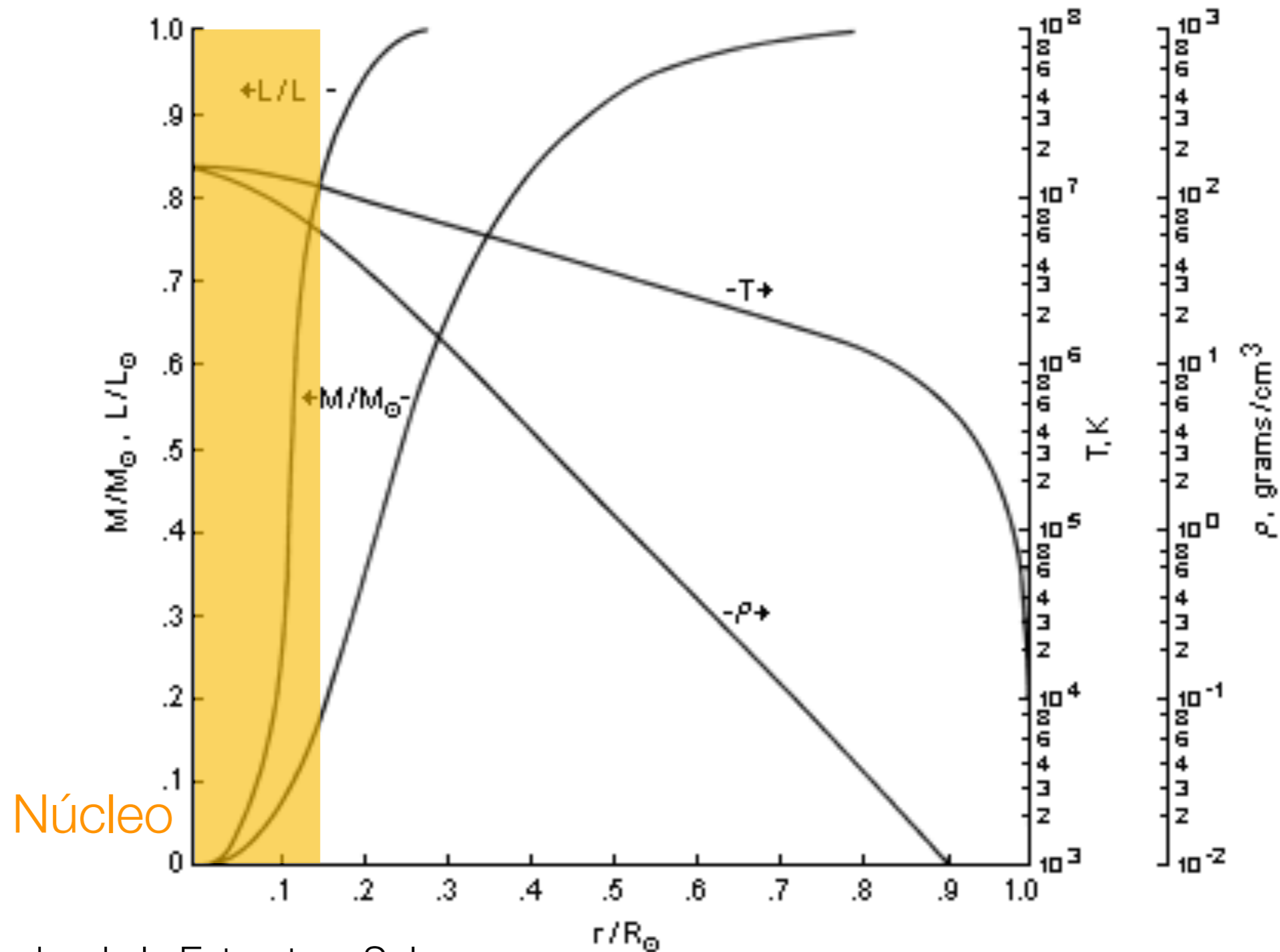
**Leyes de conservación +  
Producción de Energía +  
Ecuación de estado +  
Transporte**

**= Modelo de estructura**

Interior Estelar

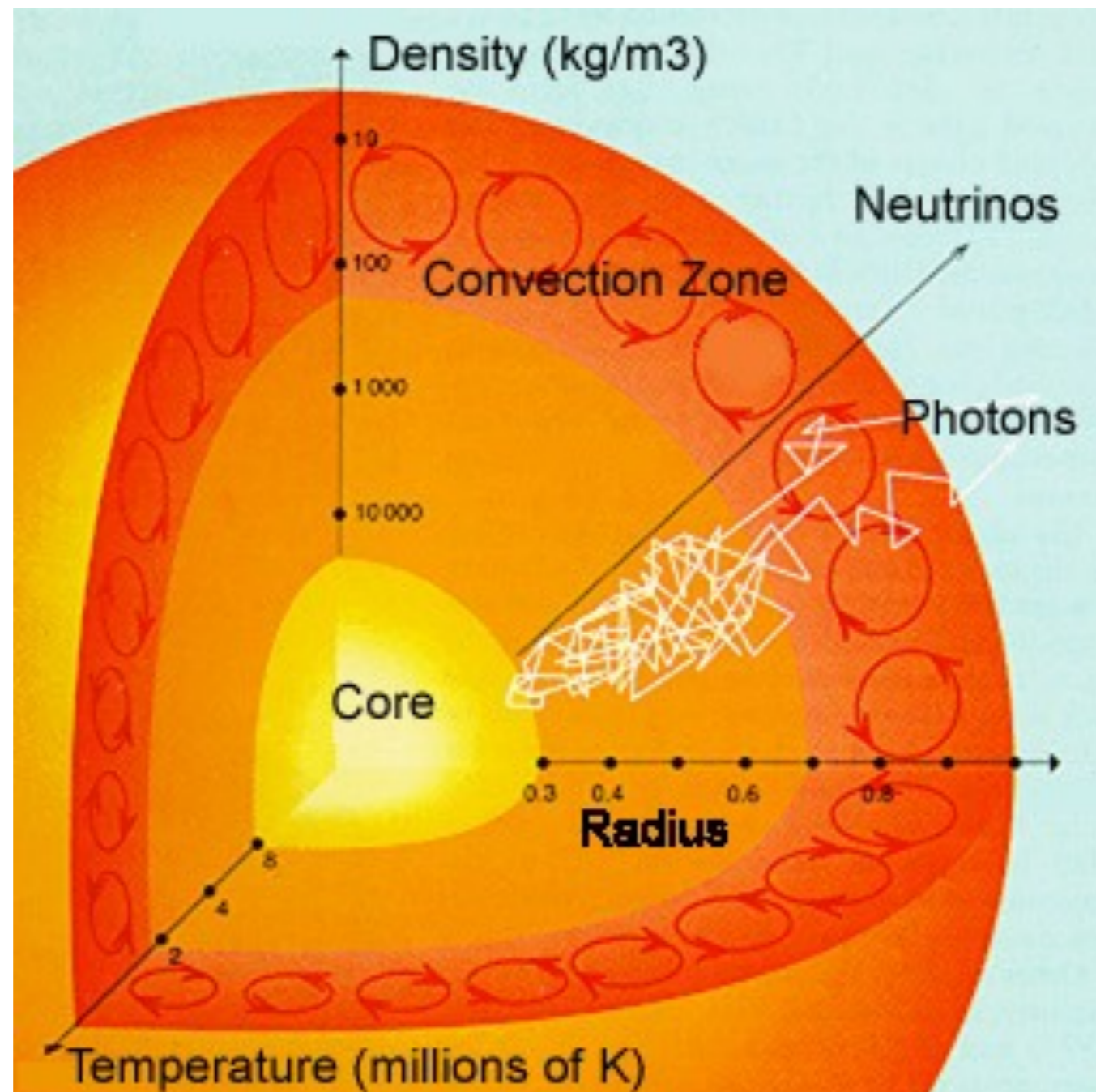
# Estructura Interna: El Sol

- El conjunto planteado de ecuaciones diferenciales no se puede resolver analíticamente — —> resolución numérica (un caso “simple”: enanas blancas)



# Estructura Interna: El Sol

- El conjunto planteado de ecuaciones diferenciales no se puede resolver analíticamente — —> resolución numérica (un caso “simple”: enanas blancas)



# Fusión Nuclear

añadir escalas de tiempo de caída libre (colapso grav) y tiempo térmico

# Producción de Energía

---

- ¿Qué mecanismo es responsable de la producción de energía?
- Jeans: ¿cuánto tiempo viviría el Sol si radiara toda la energía potencial acumulada?



# Tiempo dinámico o tiempo de caída libre (free-fall)

- El tiempo de caída libre es el tiempo que tardaría una estrella en colapsar si la presión que la soporta desapareciera instantáneamente
  - En este caso la energía potencial se iría liberando durante el colapso (potencial  $\rightarrow$  cinética  $\rightarrow$  calentamiento  $\rightarrow$  radiación)
  - Se puede estimar un límite superior suponiendo que el movimiento ocurriría con aceleración constante (correspondiente al momento  $t=0$  en que comienza el colapso y la estrella tiene radio  $R$ ):

$R = at^2$

si esa fuera la única fuente de energía, el Sol sólo hubiera vivido media hora... claramente falta algo

para el Sol  
 $t_{ff} \sim 30 \text{ min !!!}$

despreciamos el término  $\sqrt{2} \sim 1.4$  que es de orden 1

# Tiempo Térmico

---

- Es el tiempo que tardaría una estrella en radiar toda su energía térmica si no tuviera ninguna otra fuente de energía
- También corresponde al tiempo que la radiación toma para salir desde el centro hasta la superficie

$$t_t \approx \frac{0.5 GM^2/R}{L}$$

$$t_t \approx \frac{(M/M_\odot)^2}{(R/R_\odot)(L/L_\odot)} \times 2 \times 10^7 \text{ años}$$

¡a un fotón en el centro del Sol le toma 20 millones de años llegar a la fotosfera!

# Producción de Energía

---

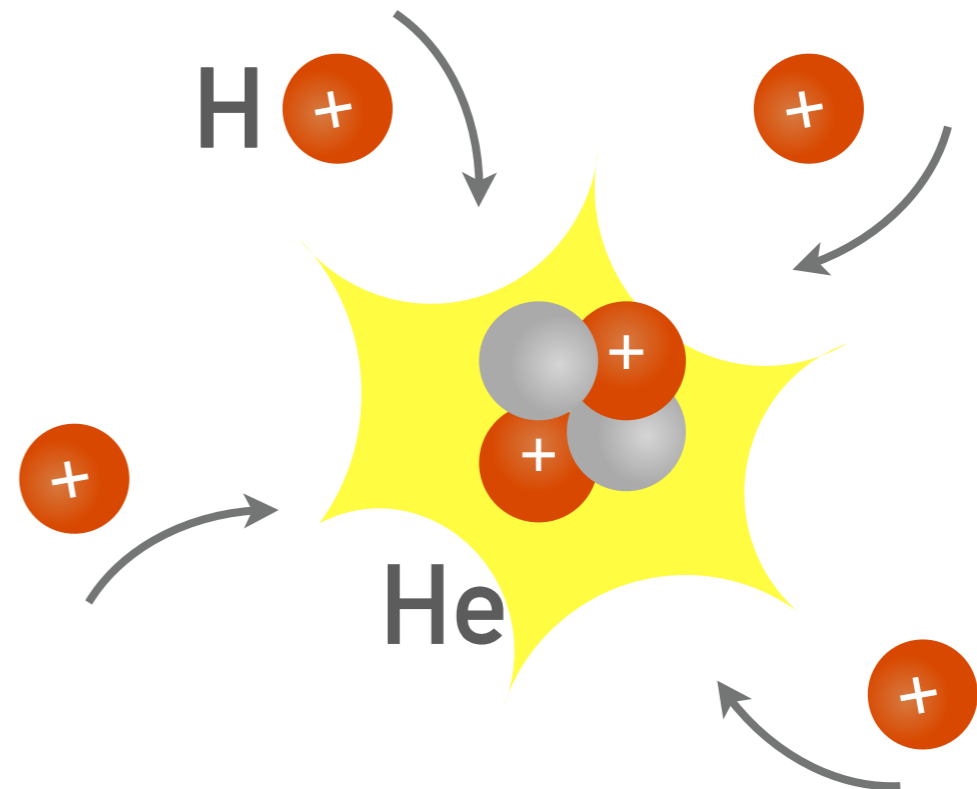
- ¿Qué mecanismo es responsable de la producción de energía?
- Jeans: No puede ser sólo liberación de la energía potencial acumulada -> da un tiempo de vida muy corto para el Sol (tiempo de caída libre ~30 min)
- Tiene que haber un mecanismo interno de producción de energía

Fusión Nuclear

Pero dos cargas del mismo signo se repelen

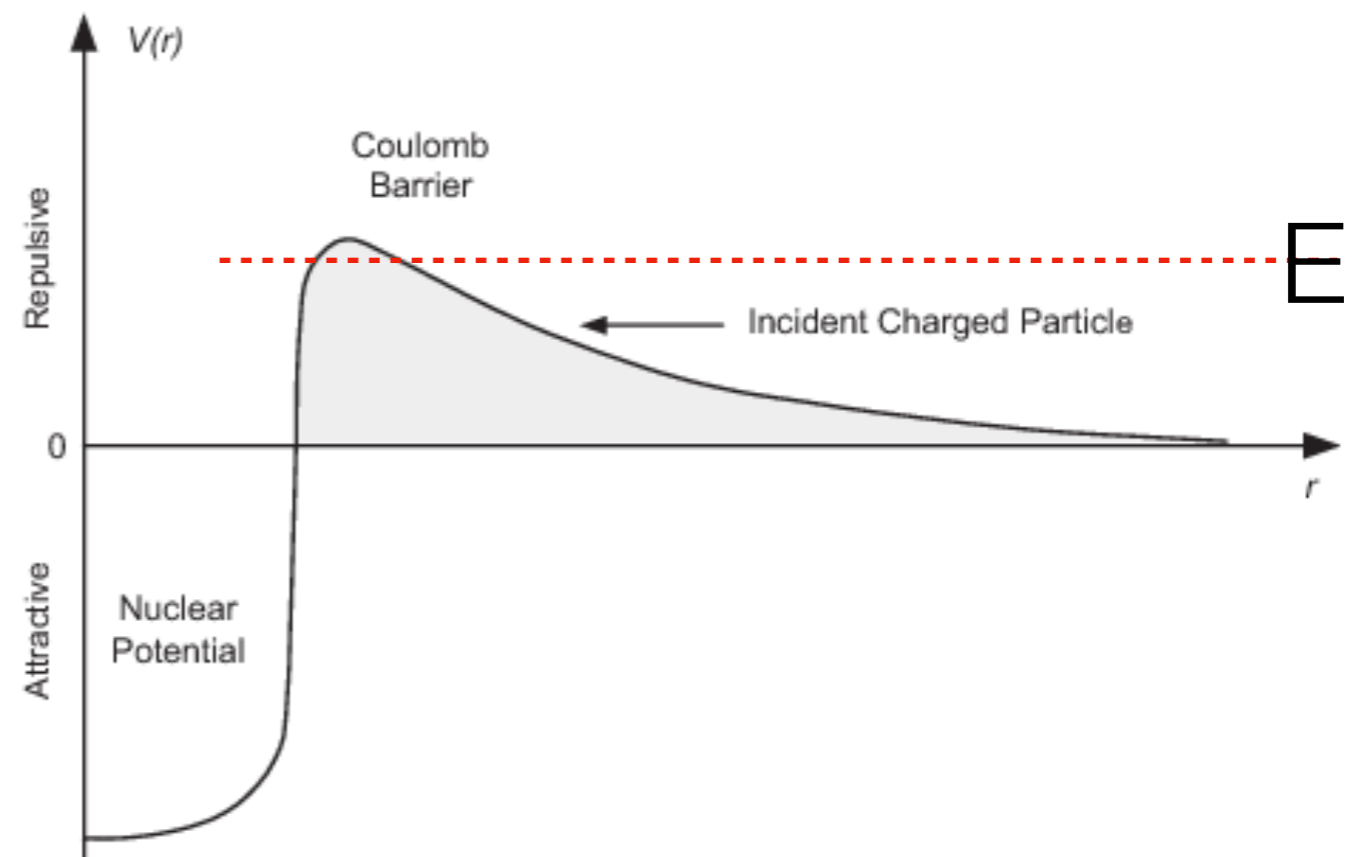
$$F_e \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

¿cómo vencer esta “Barrera de Coulomb?”



# Modelos: Estructura + Atmósfera

- La Fuerza Nuclear Fuerte es la que mantiene unidas a las partículas en los núcleos atómicos (protones carga=+ y neutrones carga=0)
- **Efecto túnel cuántico:** una partícula de Energía menor a la de la barrera de Coulomb tiene una probabilidad (pequeña) no nula de “aparecer” del otro lado de la barrera
- En el caso clásico esto no puede pasar
- En el caso cuántico sí (efecto túnel), la probabilidad de que ocurra es más alta para las partículas de mayor energía a una temperatura dada



— -> Fusión Nuclear

# Escala de tiempo nuclear

---

- La cota máxima de la energía producida sería si los 4 núcleos de H se combinaran para formar 1 de He

$$4m_p - m(^4\text{He}) = 0.007(4m_p)$$

- En ese caso el excedente de energía sería 0.7% de la masa inicial (la de los 4 protones) disponible para que ocurra la fusión
- Pero la fusión no ocurre en todo el Sol, sólo en su núcleo: ~10% de la masa total del sol está en la zona en la que puede ocurrir la fusión (núcleo).
- Con esto podemos estimar **cuánto tiempo tardaría el sol en consumir el combustible disponible para la fusión de H** (Escala de tiempo nuclear)

$$t_{nuclear} = \frac{E}{L} = \frac{Mc^2}{L} = 0.007 \times \left(\frac{0.1M_{\odot}}{L_{\odot}}\right)c^2 \approx 10^{10} \text{ años}$$

éste es el estimado del tiempo de vida del Sol

# Bibliografía

---

- Kartunnen Cap. 10, Cap 11 (escalas de tiempo)
- Kutner Cap. 9