TRIANGULARIZACIÓN HOUSEHOLDER

ALN
Clase 7
13/9/2022

Vimos del método de G-S que podemos obtener la matriz Q vía multiplicar a derecha por matrices R_i triangulares sup.:

$$A \cdot \underbrace{R_1 \cdot R_2 \cdot \cdots \cdot R_n}_{(\hat{R})^{-1}} = \hat{Q}.$$

En este sentido, el método de G-S puede ser visto como un método de ortogonalización triangular (i.e. ortogonalizar una matriz vía multiplicar por matrices ").

En el otro sentido, veremos que el método de Householder es un proceso de triangularización ortogonal, (i.e, triangularizar una matriz vía matrices ortogonales:

$$\underbrace{Q_n \cdot \cdots \cdot Q_2 \cdot Q_1}_{Q^* \text{ ortogonal}} \cdot A = R$$

$R \to$ triangular superior.

de donde resulta $A = QR$ (factorización QR)

El método de Householder (propuesto por el homónimo en 1958) tiene por idea ingeniosa introducir 0's debajo de la diagonal:

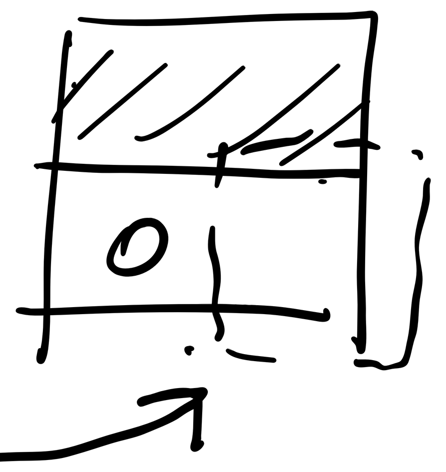
$$\underset{A}{\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_1} \underset{Q_1 A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_2} \underset{Q_2 Q_1 A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}} \xrightarrow{Q_3} \underset{Q_3 Q_2 Q_1 A}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & \boxed{*} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

La idea es que Q_k opere sobre las filas $k, k+1, \dots, m$, y ~~ob~~teniendo que antes de actuar con Q_k ya tenemos $k-1$ columnas de ceros en esas filas $k, k+1, \dots, m$.

La idea es operar a izquierda por transformaciones unitarias (o ortogonales) de la forma

$$Q_k = \begin{array}{cc} & m \\ m & \left[\begin{array}{c|c} Id_{k-1} & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right] \begin{array}{l} k-1 \\ m-(k-1) \end{array} \\ & \begin{array}{cc} k-1 & m-(k-1) \end{array} \end{array}$$

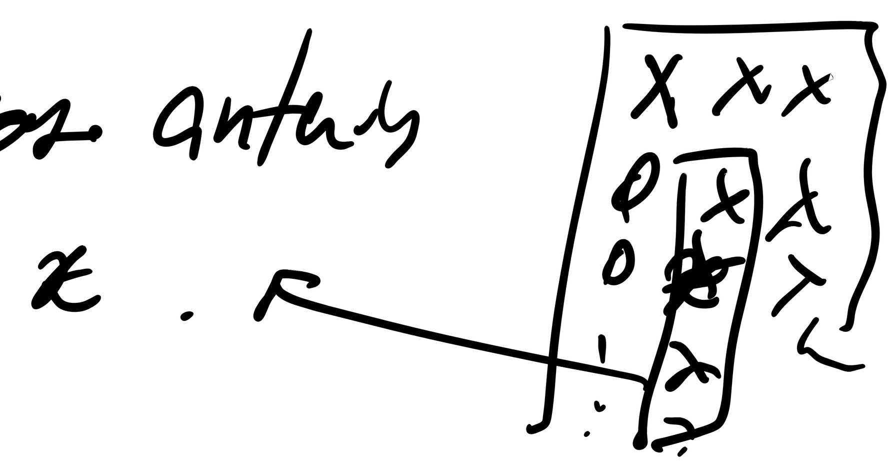
→ Observar que operando a izq. por $\left[Id_{k-1} \mid 0_{k-1\times(m-(k-1))} \right]$ fija las primeras $(k-1)$-filas.
Por otro lado, $\left[0 \mid F \right]$ opera sobre la submatriz



de tamaño $(m-(k-1))\times(m-(k-1))$.

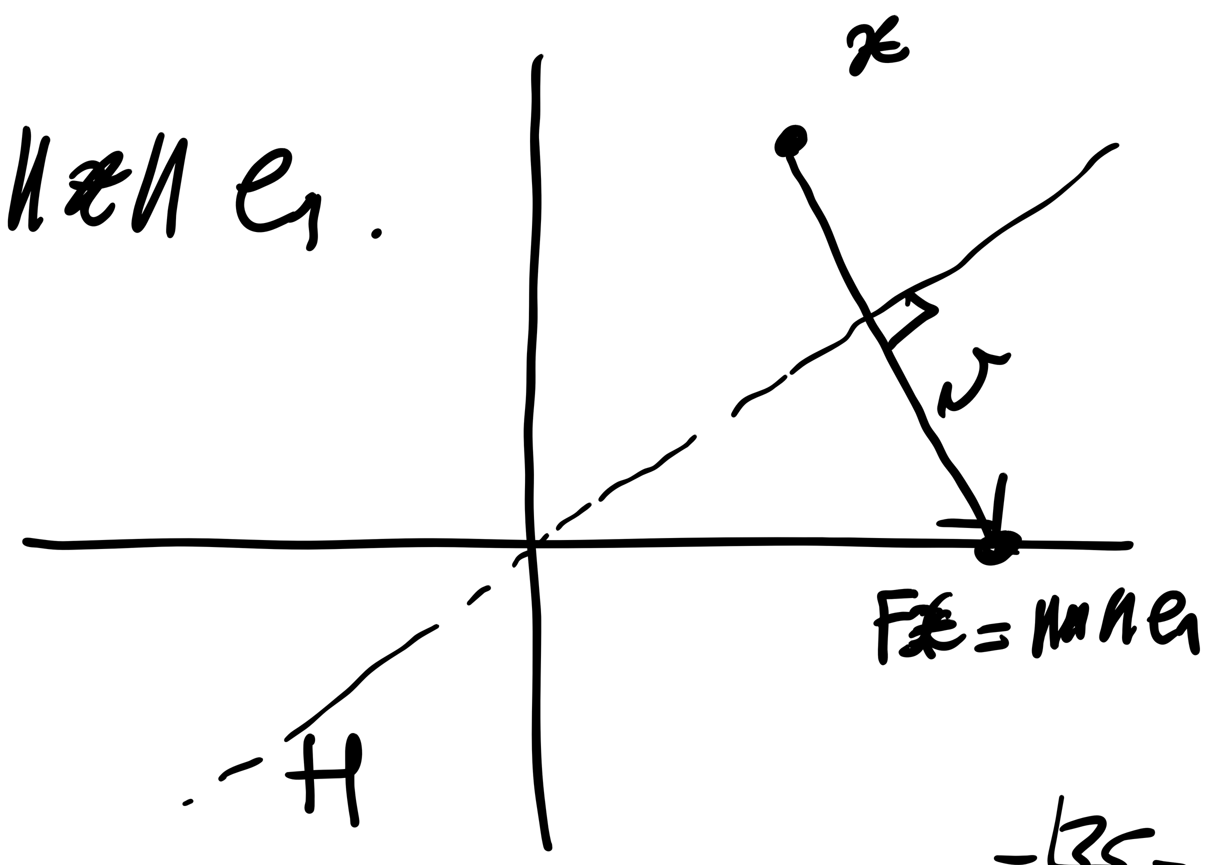
Reflexión de Householder

Supongamos que al inicio del paso k (antes de operar con Q_k) las entradas de la columna $k, k+1, \dots, m$ son dadas por el vector $x \in \mathbb{C}^{m-(k-1)}$. Por ejemplo en $k=2$ del caso anterior



La reflexión de Householder mapea

$$x = \begin{bmatrix} X \\ \vdots \\ X \end{bmatrix} \xmapsto{\ F\ } Fx = \begin{bmatrix} \|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \|x\| e_1 .$$



i.e. F es la simetría axial respecto al hiperespacio $H = v^\perp$ (subespacio de codim. 1) donde $v = \|x\| e_1 - x$.

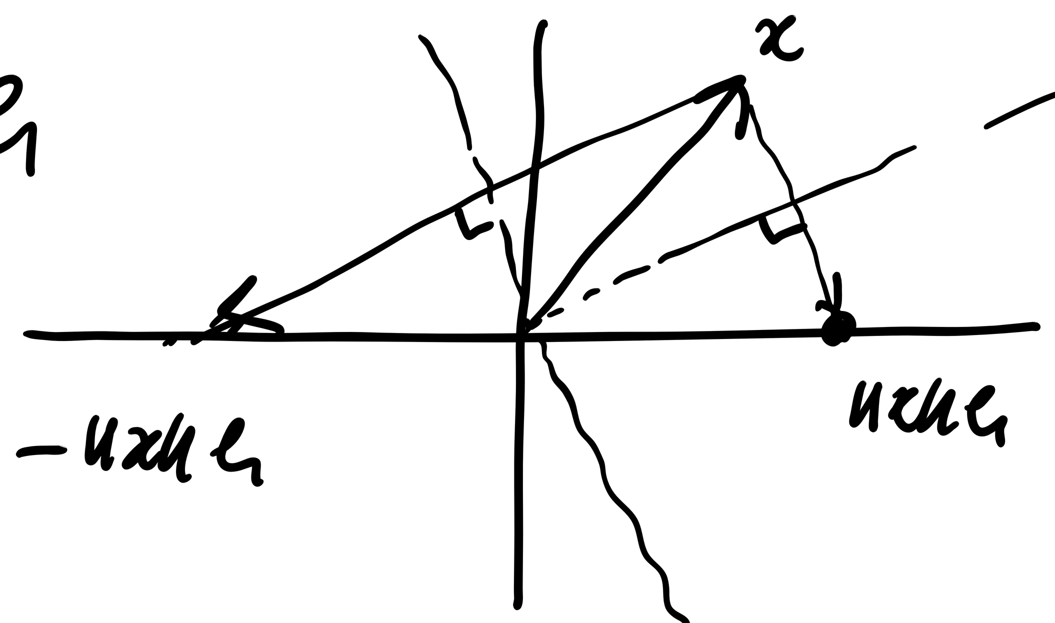
Recordando que $Id - \frac{vv^*}{\|v\|^2}$ es el proyector en $v^\perp = H$, es fácil ver que el operador que estamos buscando es

$$Fy = \left(Id - 2\frac{vv^*}{\|v\|^2} \right) y = y - 2v\left(\frac{v^* y}{v^* v}\right).$$

es decir

$$\boxed{F = Id_k - 2\frac{vv^*}{v^* v}}.$$

Con el fin de introducir 0's y ser unitaria en realidad podemos proyectar sobre $e^{i\theta}\|x\| e_1$ para cualquier θ. De hecho ~~sobre~~ sobre $\mathbb{R}$ tenemos dos opciones: proyectar sobre $\pm \|x\| e_1$



Por razones de estabilidad conviene que x no sea muy próximo a $e^{i\theta}\|x\|e_1$ para que $\|v\|$ ~~no~~ sea muy pequeño y que dividir por nº próximos a 0.

Definiendo $\mathrm{signo}(z) = \frac{z}{|z|}$ $(z \in \mathbb{C})$ lo que conviene es proyectar en $-\mathrm{signo}(x_1)\cdot\|x\| e_1$, y por lo tanto $v = -sg(x_1)\cdot\|x\| e_1 - x$ o lo que es lo mismo.

$$\boxed{v = sg(x_1)\|x\| e_1 + x}$$

Es fácil chequear que con esta elección $\|v\| \geq \|x\|$.

Algoritmo (Householder QR)

for $k = 1$ a n

$x = A_{k:m,k}$

$v_k = \text{signo}(x_1) \cdot \|x\|_2 \, e_1 + x$

$v_k = v_k / \|v_k\|_2$

$A_{k:m,k:n} = A_{k:m,k:n} - 2 v_k (v_k^* A_{k:m,k:n})$

Observar que el procedimiento anterior tiene como output una matriz triangular superior, pero no nos da información sobre Q o $\hat{Q}$.

Hay veces que no es necesario calcular Q explícitamente, y en tal caso no es necesario el esfuerzo adicional de calcularlo.

Por ejemplo. Si queremos resolver el sistema $Ax = b$ mediante desc. QR lo que queremos saber para resolverlo es qué da $Q^* b$. donde Q^* resulta ser $\left(Q_n \cdots Q_2 Q_1 A = R \text{ triang. sup.} \right)$

$Q^* = Q_n Q_{n-1} \cdots Q_1$ o $Q = Q_1^* \cdots Q_n^* = Q_1 \cdots Q_n$
(pues son proyecciones ortogonales)

y por lo tanto para calcular $Q^* b$ basta realizar $Q_n \cdots Q_1 b$
y por lo tanto podemos agregar al algoritmo anterior:

for $k = 1$ a n

$b_{k:m} = b_{k:m} - 2 v_k (v_k^* b_{k:m})$

Si queremos calcular Q podemos calcular $Q^* e_i$ con este algoritmo para luego tomar $(Q^*)^* = Q$.

Complejidad Householder.

Del algoritmo visto lo que domina es la operación

$$(\cdot) \qquad A_{k:m,k:n} = A_{k:m,k:n} - 2 v_k (v_k^* A_{k:m,k:n}).$$

Mirando por columnas $j = k+1, \dots, n$ tenemos

$$(**) \qquad A_{k:m,j} = \underbrace{A_{k:m,j} - \underbrace{2 v_k \underbrace{(v_k^* A_{k:m,j})}_{2(m-k+1)}}_{(m-k+1)}}_{m-k+1}$$

$\Rightarrow$ $\sum$ en $(**)$ son $4(m-k+1)$, y luego para $j = k+1, \dots, n$

se tiene que en $(\cdot)$ son $4(m-k+1)\cdot(n-k+1)$ y.

Luego del for $k=1$ a n se tiene $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4(m-k+1)(n-k+1)$

Aproximando, tenemos

$$4\sum_{k=1}^{n} (m-k+1)(n-k+1) \simeq 4\cdot\sum_{k=1}^{n} (m-k)(n-k) = 4\sum_{k=1}^{n}\left(m\cdot n-(m+n)k+k^2\right)$$

$$= 4\cdot\left[m\cdot n\sum_{k=1}^{n} 1 - (m+n)\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2\right] \simeq 4\cdot\left[m n^2 - (m+n)\frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}\right]$$

$$= 4\cdot\left[m n^2 - \frac{m n^2}{2} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^3}{3}\right] = \boxed{2 m n^2 - \frac{2}{3} n^3}.$$