la palabra de hoy: Poisson

- Siméon Denis Poisson: matemático francés (1781 - 1840)
- poisson: pescado en francés
- poison: veneno en francés
- poison: veneno en inglés

Probabilidad - Clase 14
Teorema de aproximación de Poisson

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Modelo de Poisson

Consideramos, para $\lambda > 0$:

- $\Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $\mathbf{P}(m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Sabemos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}.$$

Esto nos da que el modelo está bien definido, se cumple el Axioma 2.

Aproximación de Poisson a la distribución binomial

- El siguiente resultado es una aproximación diferente de las estudiadas.
- Es la probabilidad de que ocurran una cantidad determinada de éxitos en una serie de experimentos independientes,
- especialmente útil cuando la probabilidad de éxito es pequeña (y la cantidad de experimentos grande).

Proposición

- Consideremos, para cada n natural, una serie de n experimentos independientes de Bernoulli,
- La probabilidad de éxito en cada experimento igual a $p = \lambda/n$,
- La constante λ es positiva y arbitraria.
- Sea μ_n la cantidad de éxitos que ocurren en la serie n–ésima.

Entonces, tiene lugar la convergencia

$$\mathbf{P}(\mu_n = m) \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Demostración

Según la distribución binomial, tenemos

$$P_n(m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} = \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mu_n = m) &= \binom{n}{m}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \\
&= \frac{\lambda^m}{m!} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \\
&= \frac{\lambda^m}{m!} \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \times \\
&\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \\
&\qquad \to \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \qquad n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Usamos que

$$
\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda} \qquad (n \to \infty),
$$

Según la proposición recién demostrada, si n es suficientemente grande, tiene lugar la identidad aproximada

$$\mathbf{P}(\mu_n = m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

que, alternativamente, se escribe como

$$\mathbf{P}(\mu_n = m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}, \tag{1}$$

donde p designa la probabilidad de éxito en un experimento.

La fórmula de aproximación (1) es adecuada, cuando

- la cantidad de experimentos n es grande
- la probabilidad p de éxito de cada experimento es pequeña.

Ejemplo

La probabilidad de acertar en un blanco en cada disparo es de 0,01.
Calcular la probabilidad de que ocurra, por lo menos, un acierto en 400 disparos.
Solución Tenemos

$$\mathbf{P}(\mu_{400} = 0) \approx e^{-400(0{,}01)} = e^{-4} = 0{,}0183,$$

por lo que

$$\mathbf{P}(\mu_{400} \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(\mu_{400} = 0) \approx 0{,}9817.$$

¿El TCL o la aproximación de Simeón Denis?

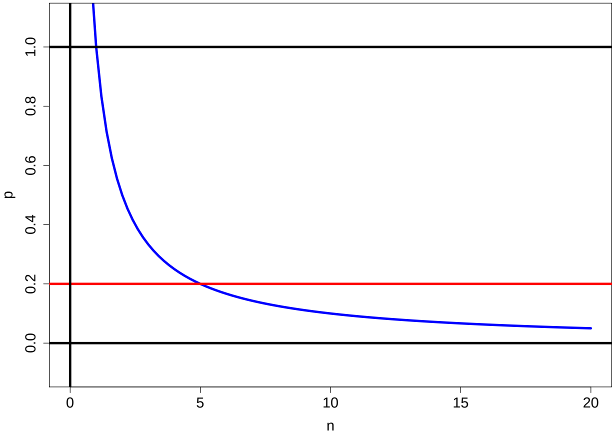


Figura: Si $p = 0.2$, constante, uso el TCL , si $np = 1$, constante, aplico la aproximación de Poisson con $\lambda = np = 1$

Aproximación de una Poisson a una Gaussiana

Tenemos un resultado que concilia estas aproximaciones. λ vamos a hacer el siguiente razonamiento:

- Si μ es la cantidad de éxitos en n experimentos de Bernoulli, entonces

$$\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{se lee “normal cero uno”.}$$

- Lo anterior es la abreviatura de

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

- Ahora sabemos que si p es pequeño, y designamos $np = \lambda$, obtenemos

$$\sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} \sim \sqrt{np} = \sqrt{\lambda}.$$

- Eso quiere decir que

$$\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \sim \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{\lambda}}.$$

- Por transitiva (?!)[1], si μ es el resultado de un experimento de Poisson:

$$\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \sim \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

---

[1] En ajedrez: ?! es jugada dudosa, !? es jugada interesante

Estimación en un modelo de Poisson

- Supongamos que observamos m como resultado de un experimento de Poisson.
- ¿Cuánto vale λ?
- Apliquemos máxima verosimilitud:
- La versomilitud es

$$\mathbf{P}(\mu = m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$$

- La log-verosimilitud es:

$$
\begin{aligned}
\ell(\lambda \,|\, m) = \log \mathbf{P}(\mu = m) &= \log\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\right) \\
&= -\lambda + m\log\lambda - \log(m!)
\end{aligned}
$$

Derivamos

$$
\frac{\partial \ell(\lambda \,|\, m)}{\partial \lambda} = -1 + \frac{m}{\lambda}.
$$

Entonces, el estimador es la raíz de esta ecuación (se puede ver que es un máximo)

$$
\hat{\lambda} = m.
$$

Esto es lo mejor que podemos hacer con una única observación. En realidad, se precisa observar varios resultados de experimentos independientes

Aplicación

El 8 de mayo el SINAE informó de la realización de 1140 tests, con 10 nuevos casos[2] El 9 son 623 tests. ¿Cual es la probabilidad de obtener 8 tests positivos, suponiendo las mismas probabilidades en ambos días?

- Del dia 8, estimamos

$$\hat{p} = \frac{10}{1140} = 0,0114.$$

- Como la probabilidad es muy baja, para el día siguiente utilizamos la aproximación de Poisson, con

$$\hat{\lambda} = n\hat{p} = 623 \times 0,0114 = 5,465.$$

[2] Es una aproximación de lo que ocurrió, porque entre los tests se realizaron unos pocos a algunas personas repetidas.

- Entonces

$$\mathbf{P}(\mu = 8) = e^{-\hat{\lambda}} \frac{\hat{\lambda}^8}{8!} = e^{-5,465} \frac{5,465^8}{8!} = 0.084.$$

- ¿Cuál es el valor mas probable de una distribución de Poisson?

La distribución de Poisson en R

The Poisson Distribution

Description

Density, distribution function, quantile function and random generation for the Poisson distribution with parameter *lambda*.

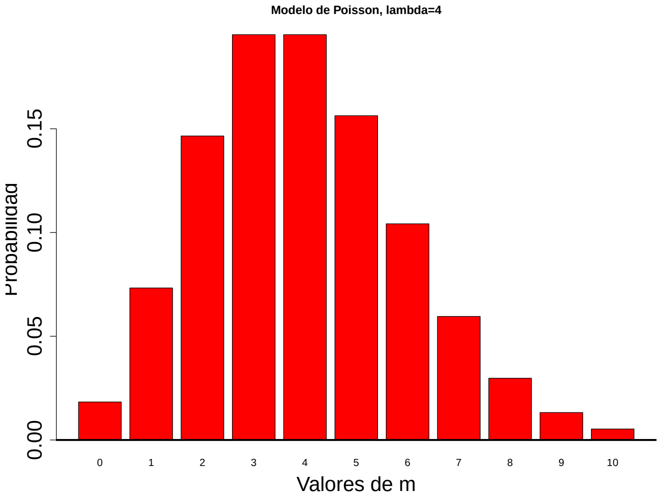
Usage

```
dpois(x, lambda, log = FALSE)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rpois(n, lambda)
```

Arguments

`x`	vector of (non-negative integer) quantiles.
`q`	vector of quantiles.
`p`	vector of probabilities.
`n`	number of random values to return.
`lambda`	vector of (non-negative) means.
`log, log.p`	logical; if TRUE, probabilities p are given as log(p).
`lower.tail`	logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \le x]$, otherwise, $P[X > x]$.

Details


Modelo de Poisson, lambda=4
Probabilidad
0.00
0.05
0.10
0.15
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Valores de m

```r
######
data <- data.frame(
  name=0:10,
  value=dpois(0:10,4)
)
barplot(height=data$value, names=data$name,col="red",
        xlab = "Valores de m",ylab = "Probabilidad",
        main="Modelo de Poisson, lambda=4",cex.lab=2,
        cex.axis=2)
abline(h=0,lwd=3)
```

Un experimento de Poisson

```r
### experimento
datos<-rpois(100,5)
datos
mean(datos)
```

```
> datos
  [1]  5  7  3  4  6  5  4  3  5  5  5  4  5  4  3 10  4  8  0  6  7  4
 [23]  4  7  2  5  7  3  5  4  5  6  3  4  5  2  5  4  5  7  3  5  5  4
 [45]  6  3  5  2  5  9  6  8  4  3  8  5  7  6  2  3  7  4  9  4  8  5
 [67]  3  6  4  8  7  7  6  8  6  5  6  9  7  3  5  4  8  4  4  6  5  4
 [89]  5  3  6  1  2  6  4  5  2  6  7  5
> mean(datos)
[1] 5.03
```


Existen tres tipos de personas: las que saben contar y las que no