Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Examen teórico. (2 horas) 14/12/2022

En lo que sigue V es un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita.

1. (**32 puntos**)
   Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Definir *valor propio* y *vector propio* de T.

   b) Probar que los valores propios de T son las raíces de su polinomio característico.

   c) Probar que si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ son valores propios distintos de T y $v_1, \dots, v_k$ son vectores propios correspondientes, entonces $\{v_1, \dots, v_k\}$ es LI.

2. (**36 puntos**)
   Supongamos que V es un espacio con producto interno.

   a) Enunciar y probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

   b) Sea W un subespacio de V. Definir el complemento ortogonal de W y probar $V = W \oplus W^{\perp}$.

   c) Supongamos $\Bbbk = \mathbb{C}$. ¿Es cierto que una isometría siempre es diagonalizable en una base ortonormal? Justificar la respuesta.

3. (**32 puntos**)
   Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Dado $\lambda \in \Bbbk$, definir el *subespacio propio generalizado* W_λ.

   b) Probar:

      1) Un escalar $\lambda \in \Bbbk$ es un valor propio de T si y solo si $W_\lambda \neq \{0\}$.

      2) Si $T(v) = \lambda v$ para ciertos $\lambda \in \Bbbk$ y $v \in V$, entonces $T^k(v) = \lambda^k v$, para todo k.

      3) Si $\lambda, \mu \in \Bbbk$ con $\lambda \neq \mu$, entonces $(T - \mu \,\mathrm{Id})|_{W_\lambda} \in \mathcal{L}(W_\lambda)$ es un isomorfismo.

Nota. En las demostraciones se deben justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice …, entonces …"