Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Examen teórico. (2 horas) 02/03/2023

En lo que sigue V es un espacio vectorial real de dimensión finita.

1. (**25 puntos**). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definir qué quiere decir que λ sea un *valor propio* de T y definir la *multiplicidad algebraica* y la *multiplicidad geométrica* de λ.

   b) Dar ejemplos de:

      1) una transformación lineal que no tenga valores propios;
      2) una transformación lineal en la cual todos sus valores propios tienen igual multiplicidad geométrica que algebraica;
      3) una transformación lineal en la cual hay algún valor propio que tiene multiplicidad geométrica menor que la algebraica.

   Justificar las afirmaciones.

2. (**25 puntos**). Supongamos que V es un espacio con producto interno.

   a) Enunciar y probar el teorema de Riesz (respecto al dual de V).

   b) Definir isometría y dar un ejemplo de una isometría distinta de la identidad que sea diagonalizable y de otra que no lo sea, justificando las afirmaciones.

3. (**25 puntos**). Supongamos que $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica.

   a) Definir base φ-ortogonal y probar su existencia.

   b) Definir que φ sea *definida positiva* y que φ sea *semidefinida positiva*. Dar ejemplos de cada uno de esos casos.

4. (**25 puntos**). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$.

   a) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, definir *subespacio propio generalizado* W_λ.

   b) Supongamos que $\chi_T(t) = \pm(t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_h)^{n_h}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$.

      1) Probar $\chi_{T|_{W_{\lambda_1}}}(t) = \pm(t-\lambda_1)^r$, con $1 \leq r \leq n_1$. Concluir $\dim W_{\lambda_1} \leq n_1$.
      2) Probar $W_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(T - \lambda_1 \operatorname{Id})^{n_1}$.

Nota. En las demostraciones se deben justificar todos los pasos; si para hacerlo se necesita un resultado previo, entonces deben enunciarlo claramente (no se pide la prueba). Es decir, escribir una frase del tipo "usando el teorema que dice ..., entonces ..."