Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebra Lineal II, curso 2022.**

Examen (3 horas) 20/07/23.

1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Sea $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que es multiplicar por A. Hallar los subespacios propios de L_A y dar una base de cada uno.

   b) Encontrar matrices $D, Q \in M_3(\mathbb{R})$ tales que D es diagonal, Q es ortogonal y $A = QDQ^t$.

   c) Se considera la forma bilineal simétrica φ en $\mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(x, y) = x^t Ay$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$. Sea Φ la forma cuadrática asociada a φ.

      1) Hallar una base φ-ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
      2) Clasificar la forma cuadrática Φ (en definida postiva, negativa, etc.) y determinar si degenera.

2. *a*) Sea $A \in M_n(\mathbb{k})$ una matriz invertible y supongamos

   $$\chi_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + a_0.$$

   Probar que es $a_0 \neq 0$ y que vale

   $$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\big((-1)^n A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I\big).$$

   b) Sea $A \in M_3(\mathbb{R})$ de la cual se sabe que tiene valores propios 1 y -1 y que la multiplicidad algebraica del valor propio 1 es 2. Se pide:

      1) Hallar el polinomio característico de A.
      2) Investigar si A es invertible.
      3) Hallar A sabiendo que vale
      $$A^2 - A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
      4) Hallar la forma de Jordan de A.

Solución.

1. a) Es $\chi_A(t) = -(t-1)^2(t-4)$, $E_1 = [(1,0,-1),\,(0,1,-1)]$ y $E_4 = [(1,1,1)]$.

   b) Como A es simétrica real, sabemos que los subespacios propios distintos son ortogonales. Aplicando Gram-Schmidt a $\{(1,0,-1),\,(0,1,-1)\}$ obtenemos que $\{(1,0,-1),\,(-1,2-1)\}$ es una base ortogonal de E_1; normalizando la base $\{(1,0,-1),\,(-1,2,-1),\,(1,1,1)\}$ obtenemos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

   c) 1) Por la parte anterior sabemos que las columnas de Q forman una base φ-ortogonal:

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

   2) Como es $A = QDQ^t$, entonces $M_B(\varphi) = D$. Como las entradas diagonales de D son todas positivas, deducimos que Φ es una forma cuadrática definida positiva y por lo tanto es no degenerada.

2. a) Es $\chi_A(t) = \det(A - tI)$, luego $a_0 = \chi_A(0) = \det(A) \neq 0$. Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton obtenemos $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0$ Multiplicando por A^{-1} obtenemos

$$A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I + a_0A^{-1} = 0$$

   Luego se despeja A^{-1}.

   b) 1) $\chi_A(t) = -(t-1)^2(t+1) = -t^3 + t^2 + t - 1$.

   2) Es $\det(A) = \chi_A(0) = -1$. Luego $\det(A) \neq 0$ y por lo tanto A es invertible.

   3) Usando la primera parte obtenemos

$$A^{-1} = -A^2 + A + I = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Luego

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   4) Es $\chi_A(t) = -(t-1)^2(t+1) = -t^3 + t^2 + t - 1$. Es $\text{rango}(A - I) = 2$, luego $\text{MG}(1) = 3 - 2 = 1$; como es $\text{MA}(1) = 2$, concluimos que la forma de Jordan de A es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$