Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Prueba 1. 25 puntos. 15/09

1. (**10 puntos**)
Recordar $\mathbb{R}_1[x] = \{a + bx : \ a, b \in \mathbb{R}\}$. Se define $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[x])$ por

$$T\big(p(x)\big) = p(0)\,(7 + 4x) - p'(0)\,(12 + 7x), \quad \forall p(x) \in \mathbb{R}_1[x],$$

siendo $p'(0)$ la derivada del polinomio $p(x)$ evaluada en 0.

a) Probar que T es diagonalizable.

b) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_1[x]$ formada por vectores propios de T y hallar $[T]_{\mathcal{B}}$.

2. (**15 puntos**)
Se consideran las siguientes matrices en $M_3(\mathbb{R})$ definidas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar sus polinomios característicos.

b) Determinar si son diagonalizables.

c) En caso de A_i ser diagonalizable ($i = 1, 2$), hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tal que $A_i = PDP^{-1}$.

Solución.

1. *a*) Si $\mathcal{C} = \{1, x\}$, entonces

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_T(t) = (t+1)(t-1).$$

   Como es $\dim \mathbb{R}_1[x] = 2$ y T tiene dos valores propios, entonces T es diagonalizable.

   b)

$$\mathcal{B} = \{2 + x,\, 3 + 2x\}, \qquad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. *a*) $\chi_{A_1}(t) = -(t-1)(t-2)^2, \quad \chi_{A_2}(t) = -t(t-1)^2.$

   b) Los valores propios de A_1 son 1 y 2, y los de A_2 son 0 y 1.

$$\operatorname{rango}(A_1 - 2I) = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 1; \quad \operatorname{rango}(A_2 - I) = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

   Luego para A_1 es $\mathrm{MG}(2) = 3 - 1 = 2 = \mathrm{MA}(2)$ y para A_2 es $\mathrm{MG}(1) = 3 - 2 = 1 < 2 = \mathrm{MA}(1)$. Entonces A_1 es diagonalizable y A_2 no lo es.

   c) Es $E_1 = [(3,2,1)]$ y $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = y + 2z\} = [(1,1,0),\, (2,0,1)]$. Luego $A_1 = PDP^{-1}$, siendo

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$