Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Prueba 2. 25 puntos. 14/10.

1. (**9 puntos**)
   Se considera el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar. Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x+y+z=0\}$.
   a) Hallar una base ortonormal de W.
   b) Sea $v = (1,0,0)$.
      1) Hallar la proyección ortogonal de v sobre W.
      2) Calcular la distancia de v a W.

2. (**8 puntos**)
   Se considera el espacio $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar. Sean $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidos por
   $$T_1(x,y) = (3x+2y,\, -2x+3y), \quad T_2(x,y) = (2x-2y,\, -2x+5y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
   a) Investigar si son autoadjuntos.
   b) En caso del operador ser autoadjunto, hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la cual el operador se diagonaliza.

3. (**8 puntos**)
   Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita. Decimos que $T \in \mathcal{L}(V)$ es *semipositivo* si
   - T es autoadjunto,
   - vale $\langle T(v), v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$.

   a) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que T es semipositivo si y solo si T es autoadjunto y todos sus valores propios son no negativos.
   b) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador semipositivo. Probar que existe un operador semipositivo $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que $S^2 = T$. *Sugerencia:* definir S es una base ortonormal adecuada.

Solución.

1. *a*) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}$ es una base ortonormal de W.

   b) 1) $P_W(v) = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$.

   2) $d(v,W) = \|v - P_W(v)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. *a*) Es
$$T_1 = L_{A_1},\ A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right); \qquad T_2 = L_{A_2},\ A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right).$$
   Como A_2 es simétrica y A_1 no lo es, entonces T_2 es autoadjunto y T_1 no es autoadjunto.

   b) Si $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1),\ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)\right\}$, entonces $[T_2]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

3. *a*) Supongamos que T es semipositivo. Entonces T es autoadjunto, y si vale $T(v) = \lambda v$, con $v \neq 0$, entonces
$$0 \leq \langle T(v), v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \lambda\|v\|^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0.$$
   Supongamos ahora que T es autoadjunto y que todos los valores propios de T son no negativos. Como T es autoadjunto, entonces existe $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Además es $\lambda_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Sea $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ un vector cualquiera de V. Entonces
$$\begin{aligned}\langle T(v), v\rangle &= \left\langle T\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right), \sum_{j=1}^n a_j v_j\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j\right\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i\lambda_i a_j\langle v_i, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle T(v), v\rangle \geq 0,\ \forall v \in V.\end{aligned}$$

   b) Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador semipositivo. Por la prueba de la primera parte, sabemos que existe $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, siendo $\lambda_i \geq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Definimos $S \in \mathcal{L}(V)$ en la base $\mathcal{B}$ mediante
$$S(v_i) = \sqrt{\lambda_i}v_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$
   Entonces
$$S^2(v_i) = \left(\sqrt{\lambda_i}\right)^2 v_i = \lambda_i v_i,\ \forall i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad S^2(v_i) = T(v_i),\ \forall i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad S^2 = T.$$
   Por la forma en que lo definimos, S es diagonalizable en la base ortonormal $\mathcal{B}$ con valores propios reales no negativos; luego S^2 es un operador semipositivo, dado que es autoadjunto (por ser diagonalizable en una base ortonormal) y sus valores propios son no negativos.