Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Prueba 3. 25 puntos. 11/11.

1. (**8 puntos**)
   Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, siendo V un espacio con producto interno de dimensión finita.
   a) Probar $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \operatorname{Ker} T$.
   b) Supongamos que T es normal. Probar:
      1) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$.
      2) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

2. (**8 puntos**)
   Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita, $W \subset V$ un subespacio y P_W la proyección ortogonal sobre W. Se considera $T \in \mathcal{L}(V)$ definida por $T(v) = 2P_W(v) - v$, para todo $v \in V$
   a) Probar que T es una isometría autoadjunta.
   b) Hallar los subespacios propios de T.

3. (**9 puntos**)
   Se considera la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
   $$\Phi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 6yz, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$
   Sea $\varphi \in \operatorname{Bil}_S\left(\mathbb{R}^3\right)$ la forma bilineal asociada.
   a) Hallar una base φ-ortogonal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ y la matriz $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
   b) Clasificar la forma cuadrática Φ (en definida positiva, negativa, etc.) y determinar si degenera o no.

Solución.

1. *a*)

$$v \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; T(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle T(v), w\rangle = 0,\ \forall w \in V \;\Leftrightarrow\; \langle v, T^*(w)\rangle = 0,\ \forall w \in V \;\Leftrightarrow\; v \in (\operatorname{Im} T^*)^\perp.$$

   b) 1) Como T es normal entonces $\|T^*(v)\| = \|T(v)\|$, para todo $v \in V$. Luego

$$v \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; T(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; \|T(v)\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \|T^*(v)\| = 0 \;\Leftrightarrow\; T^*(v) = 0 \;\Leftrightarrow\; v \in \operatorname{Ker} T^*.$$

   2) Usando la parte b1) es $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$. Aplicando la parte a) a T^* obtenemos $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T^{**})^\perp = (\operatorname{Im} T)^\perp$. Entonces $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$.

2. Como P_W es la proyección ortogonal sobre W, vale $P_W^2 = P_W = P_W^*$, $P_W(w) = w$, para todo $w \in W$ y $\operatorname{Ker} P_W = W^\perp$.

   a) Es $T = 2P_W - \mathrm{Id}$, luego

$$\begin{aligned} T^* &= (2P_W - \mathrm{Id})^* = 2P_W^* - \mathrm{Id}^* = 2P_W - \mathrm{Id} = T; \\ T^*T &= TT = (2P_W - \mathrm{Id})(2P_W - \mathrm{Id}) = 4P_W^2 - 2P_w - 2P_W + \mathrm{Id} = 4P_W - 4P_w + \mathrm{Id} = \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

   Luego $T^* = T$ y $T^*T = \mathrm{Id}$.

   b) Vale

$$\begin{aligned} v \in W &\Rightarrow\; T(v) = 2P_W(v) - v = 2v - v = v \;\Rightarrow\; T(v) = v; \\ v \in W^\perp &\Rightarrow\; T(v) = 2P_W(v) - v = 0 - v = -v \;\Rightarrow\; T(v) = -v. \end{aligned}$$

   Luego $W \subset E_1$ y $W^\perp \subset E_{-1}$. Como T es una isometría autoadjunta, vale $V = E_1 \oplus E_{-1}$. Luego

$$V = W \oplus W^\perp, \quad V = E_1 \oplus E_{-1}, \quad W \subset E_1, \quad W^\perp \subset E_{-1}.$$

   Esto implica (tomando dimensiones) $E_1 = W$ y $E_{-1} = W^\perp$.

3. *a*) Si $\mathcal{C}$ es la base canónica, entonces

$$M_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el algoritmo de diagonalización obtenemos

$$\begin{array}{ccc|ccc|c}
2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
-1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & C_3 - C_1 \\
2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
-1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & F_3 - F_1 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & -1 & 0 & & & & \\
-1 & 1 & 4 & & & & C_2 + \frac{1}{2}C_1 \\
0 & 4 & 1 & & & & \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \\
-1 & \frac{1}{2} & 4 & 0 & 1 & 0 & F_2 + \frac{1}{2}F_1 \\
0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & 0 & 0 & & & & \\
0 & \frac{1}{2} & 4 & & & & C_3 - 8C_2 \\
0 & 4 & 1 & & & & \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -5 & \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -8 & F_3 - 8F_2 \\
0 & 4 & -31 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
2 & 0 & 0 & & & & \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\
0 & 0 & -31 & & & &
\end{array}$$

Luego $\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (1/2,1,0),\ (-5,-8,1)\}$ es una base φ-ortogonal y

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -31 \end{pmatrix}.$$

b) De acuerdo a $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, como hay entradas diagonales positivas y negativas, entonces Φ es no definida, y como no hay entradas diagonales nulas, entonces Φ es no degenerada.