Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Prueba 4 (examen), 2 horas, 25 puntos. 14/12/22.

1. (**10 puntos**)
   Sean V un espacio de dimensión 3 y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador que tiene 3 valores propios distintos.

   a) Probar que existe $v_0 \in V$ tal que $V = S_{v_0,T}$ ($S_{v_0,T}$ es el subespacio T-cíclico generado por v_0).

   b) Probar que si $w \in V$, entonces existe un polinomio $p(t) = at^2 + bt + c$ tal que $w = p(T)(v_0)$.

2. (**15 puntos**)
   Se considera $T = L_A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^5\right)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Hallar la forma de Jordan de T.

   b) Hallar una base de Jordan de $\mathbb{R}^5$ correspondiente a T.

Solución.

1. *a*) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los valores propios y v_1, v_2, v_3 vectores propios correspondientes. Como los valores propios son distintos, entonces $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V. Consideramos $v_0 := v_1 + v_2 + v_3$. Recordar $S_{v_0,T} = [T^n(v) : n \in \mathbb{N}]$. Probaremos que $\mathcal{C} = \left\{T^2(v_0), T(v_0), v_0\right\}$ es una base de V. Sean $a, b, c \in \Bbbk$ tales que $aT^2(v_0) + bT(v_0) + cv_0 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= aT^2(v_0) + bT(v_0) + cv_0 \\
&= a\left(\lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \lambda_3^2 v_3\right) + b\left(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3\right) + c\left(v_1 + v_2 + v_3\right) \\
&= \left(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right) v_1 + \left(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\right) v_2 + \left(a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c\right) v_3.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{B}$ es LI esto implica

$$\begin{cases} a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0 \\ a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c = 0 \\ a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c = 0 \end{cases} .$$

El determinante de ese sistema es $\Delta = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \neq 0$, luego la única solución que admite es la trivial. Esto implica que $\mathcal{C}$ es LI y por lo tanto es base.

b) Si $w \in V$, como $\mathcal{C}$ es base de V entonces existen $a, b, c \in \Bbbk$ tales que

$$w = aT^2(v_0) + bT(v_0) + cv_0 = \left(aT^2 + bT + c\,\mathrm{Id}\right)(v_0),$$

luego $w = p(T)(v_0)$, con $p(t) = at^2 + bt + c$.

2.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Es $\chi_A(t) = -(t-1)^5$, luego el único valor propio es $\lambda = 1$. Operando obtenemos

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-I)^3 = 0. \tag{1}$$

Luego

$$\operatorname{rango}(A - I) = 2, \quad \operatorname{rango}(A-I)^2 = 1, \quad \operatorname{rango}(A-I)^3 = 0.$$

De $\operatorname{rango}(A - I) = 2$ deducimos $\mathrm{MG}(1) = 3$, luego hay 3 bloques de Jordan. De la sucesión de rangos anteriores deducimos que el bloque mayor tiene orden 3, luego la forma de Jordan de T es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) De acuerdo a la forma de J, sabemos que la base de Jordan es del tipo

$$\mathcal{B} = \left\{(T-\mathrm{Id})^2(u),\ (T-\mathrm{Id})(u),\ u,\ v,\ w\right\},$$

siendo $u \in \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id})^3 \setminus \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id})^2$ y $v, w \in \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id})$. Usando (1) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id}) &= \left\{(x,y,z,t,r) \in \mathbb{R}^5 :\ x = y,\ x+t+r = 0\right\} \\ \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id})^2 &= \left\{(x,y,z,t,r) \in \mathbb{R}^5 :\ 2x-y-t-r = 0\right\} \\ \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id})^2 &= \mathbb{R}^5. \end{aligned}$$

hay que tomar $u \in \mathbb{R}^5 \setminus \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id})^2$. Elegimos $u = (1,0,0,0,0)$. Luego $(T-\mathrm{Id})(u) = (2,4,3,0,0)$ y $(T-\mathrm{Id})^2(u) = (0,0,2,0,0)$. Tenemos que elegir $v, w \in \mathrm{Ker}\,(T-\mathrm{Id})$ tales que $\{(T-\mathrm{Id})^2(u), v, w\}$ sea LI. Elegimos $v = (1,1,0,-1,0)$ y $w = (1,1,0,0,-1)$. Luego

$$\mathcal{B} = \{(0,0,2,0,0),\ (2,4,3,0,0),\ (1,0,0,0,0),\ (1,1,0,-1,0),\ (1,1,0,0,-1)\}$$

es una base de Jordan de $\mathbb{R}^5$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = J$.