Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Prueba 4 (examen), 2 horas, 25 puntos. 10/02/23.

1. (**12 puntos**) Se define $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ mediante

$$T(x, y, z, t, u) = (2x,\ x + 2y + z - t + 2u,\ -x + 3z + t - u,\ -x + 3t,\ 3u), \quad \forall (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5.$$

   a) Hallar la forma de Jordan J de T.
   b) Hallar una base de Jordan correspondiente a T.

2. (**13 puntos**) Sea V un espacio de dimensión 3 y $T \in \mathcal{L}(V)$ de la cual se sabe que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{k}.$$

   a) Probar que T es biyectiva.
   b) Hallar la matriz asociada a T^{-1} en la base $\mathcal{B}$.
   c) Hallar el polinomio característico de T^{-1}.
   d) Hallar la forma de Jordan de T^{-1}.

Solución.

1. Es $T = L_A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Es $\chi_T(t) = -(t-2)^2(t-3)^2$ y $\mathrm{MG}(2) = \mathrm{MG}(3) = 2$, Luego

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   b) Vale

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(T - 2\,\mathrm{Id}) &= [(1,0,0,1,0),\ (0,1,0,0,0)], \\ \operatorname{Ker}(T - 3\,\mathrm{Id}) &= [(0,1,1,0,0),\ (0,1,0,1,1)], \\ \operatorname{Ker}(T - 3\,\mathrm{Id})^2 &= [(0,1,1,0,0),\ (0,0,2,1,0),\ (0,0,-3,0,1)]. \end{aligned}$$

   Es $(0,0,2,1,0) \in \operatorname{Ker}(T-3\,\mathrm{Id})^2 \setminus \operatorname{Ker}(T-3\,\mathrm{Id})$ y $(T-3\,\mathrm{Id})(0,0,2,1,0) = (0,1,1,0,0)$, luego una base de Jordan correspondiente a T es

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,1,0),\ (0,1,0,0,0),\ (0,1,1,0,0),\ (0,0,2,1,0),\ (0,1,0,1,1)\}.$$

2. *a*) Es $\det([T]_{\mathcal{B}}) = \lambda^3 \neq 0$. Entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es invertible lo cual equivale a que T sea invertible, que a su vez equivale a que T sea biyectiva.

   b)

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

   c) $\chi_{T^{-1}}(t) = -\left(t - \lambda^{-1}\right)^3$.

   d) Por la parte anterior, el único valor propio de T^{-1} es λ^{-1}. Si $A = \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}}$, entonces

$$\operatorname{rango}\left(A - \lambda^{-1} I\right) = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & 0 & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{MG}\left(\lambda^{-1}\right) = 1.$$

   Luego hay un solo bloque correspondiente a λ^{-1} y por lo tanto la forma de Jordan de T^{-1} es

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$