Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2022

Prueba 4 (examen), 2 horas, 25 puntos. 02/03/23.

1. (**8 puntos**)
   Hallar una matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ sabiendo que tiene valores propios 1, -1 y 2, y verifica
   $$A^3 - 2A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Sugerencia: aplicar el teorema de Cayley-Hamilton.

2. (**9 puntos**)
   Sea $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ definida por
   $$T(x,y,z) = (-x+2y+4z,\ -y+3z,\ -z), \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
   Hallar la forma de Jordan y una base de Jordan correspondiente.

3. (**8 puntos**)
   Hallar la forma de Jordan de $A \in M_9(\mathbb{R})$, sabiendo
   - $\chi_A(t) = -(t-5)^3(t-1)^6$.
   - $\text{rango}(A-5I) = 7$, $\quad \text{rango}(A-I) = 6$, $\quad \text{rango}(A-I)^2 = 4$, $\quad \text{rango}(A-I)^3 = \text{rango}(A-I)^4 = 3$.

Solución.

1. Es $\chi_A(t) = -(t-1)(t+1)(t-2) = -t^3 + 2t^2 + t - 2$. Aplicando Cayley-Hamilton obtenemos

$$-A^3+2A^2+A-2I=0 \quad \Rightarrow \quad A = A^3-2A^2+2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Es $T = L_A$ siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es $\chi_A(t) = -(t+1)^3$ y $\operatorname{rango}(A+I) = 2$. Luego $\operatorname{MG}(-1) = 1$ y por lo tanto hay un solo bloque de Jordan. Luego la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos

$$\operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id}) = \{(x,0,0):\ x\in\mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})^2 = \{(x,y,0):\ x,y\in\mathbb{R}\}, \quad \operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})^3 = \mathbb{R}^3.$$

Es $(0,0,1) \in \operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})^3 \setminus \operatorname{Ker}(T+\mathrm{Id})^2$ y vale $(T+\mathrm{Id})(0,0,1) = (4,3,0)$ y $(T+\mathrm{Id})^2(0,0,1) = (6,0,0)$. Luego base de Jordan correspondiente es $\mathcal{B} = \{(6,0,0),(4,3,0),(0,0,1)\}$.

3. La forma de jordan J tiene un bloque de orden 3 correspondiente al valor propio 5 y un bloque de orden 6 correspondiente al valor propio 1.

$\operatorname{MG}(5) = 9 - \operatorname{rango}(A-5I) = 2$, luego hay dos bloques de Jordan correspondientes al valor propio 5 y por lo tanto uno tiene orden 2 y el otro orden 1.

$\operatorname{MG}(1) = 9 - \operatorname{rango}(A-I) = 3$, luego hay tres bloques de Jordan correspondientes al valor propio 1. Como es $\operatorname{rango}(A-I)^2 > \operatorname{rango}(A-I)^3 = \operatorname{rango}(A-I)^4$, entonces el tamaño del mayor bloque de Jordan correspondiente al valor propio 1 es 3; como hay tres bloques, entones los otros tienen tamaños 2 y 1. Entonces la forma de Jordan es (omitimos los ceros fuera de los bloques de Jordan)

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 5 & & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$