Mecánica cuántica 2022 POSGRADO. WKB y método variacional.

11.

Obtenga las condiciones en que la solución WKB es válida ($|A''/A| << \Phi^2$, $p^2/\hbar^2$) en términos de la función k(x) y sus derivadas primeras y segundas. Interprete el resultado.

12.

Considere una partícula en una caja rígida de ancho a, dentro de la cual hay un potencial en el intervalo 0 < x < a.

a. Escriba la f.o. del sistema en la aproximación WKB, y obtenga una ecuación para la cuantificación de la energía.

b. Aplique a un potencial V(x)=0 en la caja, Comente el resultado.

c. Si el potencial V(x) vale V_0 en la mitad de la caja, y 0 en la otra mitad, calcule las energías. Exprese el resultado en función de V_0 y de las energías de b., $E_n^0 = {(n\pi\hbar)^2}/{2ma^2} > V_0$ Asuma que $E_n^1 > V_0$ pero no asuma que $E_n \gg V_0$.

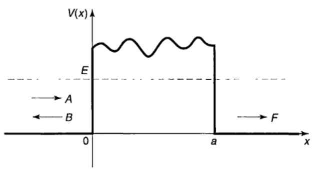
d. Compare con el resultado de teoría de perturbaciones, e indique en qué condiciones son similares.

13.

Use la aproximación WKB para calcular las energías de un oscilador armónico. Compare con el resultado exacto. Obtenga las funciones de onda del estado base y primer excitado. Grafique y compare con el resutado exacto.

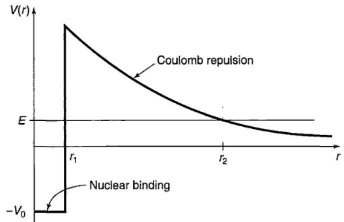
14.

Considere la trasmisión a través de un escalón arbitrario, como en la figura.



a. El coeficiente de trasmisión es $T=|F|^2/|A|^2$. Escriba la función de onda en la aproximación WKB en (0,a). Asuma que la barrera es muy alta o ancha, de forma que la exponencial creciente en (0,a) tiene un coeficiente mucho menor que la decreciente en (0,a). Calcule entonces T, que tendrá una expresíon T= $e^{-2\gamma}$.

b. Aplique al decaimiento α, obtenido por Gamow en 1928. Este aproximó la fuerza nuclear sobre la partícula α en el núcleo por un pozo de potencial, y la repulsión electromagnética por el potencial usual eléctrico a partir del radio del núcleo, r_1, tal como en la figura.



Para una partícula α de energía E, calcule γ.

c. Repita el cálculo asumiendo $r_1 << r_2$ y muestre que γ es una función lineal de $1/\sqrt{E}$.

d. La vida media se puede calcular a partir de la probabilidad del efecto tunel. Si la partícula α *tiene una* $v$elocidad v en el núcleo, muestre que la vida media del núcleo es $\tau = 2r_1/v\, e^{2\gamma}$. Observe que, a partir de este resultado, midiendo τ para diferentes núcleos (Z), y graficando el logaritmo de τ en función de $1/\sqrt{E}$ este modelo del decaimiento α predice una recta, tal como se verifica a partir de los experimentos.

El método variacional (Ritz) se basa en la observación de que $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq E_0$, siendo ψ una función de onda arbitraria, y E_0 la energía del estado base. Si la función de onda ψ depende de parámetros, minimizando respecto a estos se puede estimar la energía del estado base. A su vez, la energía del primer excitado se obtener por variaciones en el espacio de funciones ortogonales al estado base.

15.
Considere un oscilador armónico con una perturbación cuártica.
a. Use el método variacional para calcular el nivel de energía más bajo usando como función de prueba una combinación lineal de las autofunciones del oscilador del estado base y del segundo estado excitado, con coeficientes a y b respectivamente. Use a/b y w como parámetros variacionales.
b. Compare con el resultado de teoría de perturbaciones.

16.
Obtenga una estimación de la energía base del átomo de hidrógeno usando como función de prueba el autoestado de energía más baja del oscilador tridimensional.

17.
Considere el átomo de helio, y considere, además de la interacción de los electrones con el núcleo, la interacción entre los dos electrones. Tome como función de prueba el producto de las funciones de onda del átomo de hidrógeno en el estado base, pero considerando Z (en vez de Z=2) como parámetro variacional.
a. Calcule los valores esperado de los términos de energía cinética.
b. Calcule los 3 valores medios de las energías de interacción de los electrones.
c. Minimice respecto de Z el valor medio del hamiltoniano, obtenga Z, y calcule la energía del estado base del helio. Compare con el vlaor experimental $E_0 = -2{,}904\ e^2/a_0$, siendo a_0 el radio de Bohr.