Valores y vectores propios

(de una matriz cuadrada)

Motivación: Modelo de Leslie (y otros modelos similares)

Estado del sistema: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vector columna $n \times 1$

$X^{(0)}$ estado inicial, $X^{(1)}$ estado siguiente

$$X^{(1)} = A\, X^{(0)}$$

A matriz de transición (matriz cuadrada $n \times n$)

también: $X^{(2)} = A\, X^{(1)}$, ... $X^{(k)} = A\, X^{(k-1)}$

Qué predice el modelo?

Hay estados de equilibrio?

Estado de equilibrio: vector v tal que $Av = v$
($n \times 1$)

Si $X^{(0)} = v \longrightarrow X^{(1)} = v \longrightarrow X^{(2)} = v \longrightarrow$ ---

Observar: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ cumple $Av = v$

(para cualquier A)

Hay otros estados de equilibrio?

Hay proporciones de equilibrio?

vector v tal que Av es múltiplo de v

Osea: $Av = \lambda v$ para algún escalar λ

(Si $\lambda = 1$ es un estado de equilibrio)

Si $X^{(0)} = v \longrightarrow X^{(1)} = \lambda v \longrightarrow X^{(2)} = \lambda^2 v \longrightarrow \cdots$

$X^{(k)} = \lambda^k v$

→ Las proporciones entre las entradas de $X^{(k)}$ se mantienen constantes

(mismas proporciones que hay entre las entradas de v)

Observar: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ cumple $Av = \lambda v$

para cualquier A y cualquier λ.

Hay otros?

Definición: Sea A una matriz cuadrada $(n \times n)$

Un vector propio de A es un vector $(n \times 1)$ que cumple:

$$v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A v = \lambda v \quad \text{para algún } \lambda \text{ escalar}$$

λ es el valor propio de A asociado al vector propio v.

Osea: λ es valor propio de A si existe $v \neq \vec{0}$ con $A v = \lambda v$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

① Es $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vector propio de A?

$$A v = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SI valor propio asociado: $\lambda = 4$

② Es $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vector propio de A?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 = \lambda \\ 3 = 2\lambda \end{cases}$$ Incompatible. **NO** es vector propio de A

③ Los vectores $v = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Son vectores propios de A ?

Notar: $v = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es ve.p. de A asociado al va.p. 4

entonces: $Av = A\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\, 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4v$

$\boxed{Av = 4v}$ para cualquier α.

Si $\alpha = 0 \longrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO

Si $\alpha \neq 0 \longrightarrow v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Av = 4v$ SI

(va.p. 4)

Entonces: $\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \neq 0$ son vectores propios de A asociados al va.p. 4

En general: múltiplo no nulo de un vect. propio. de A es también vector propio de A.

(asociado al mismo valor propio)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

¿Es $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$ un vector propio de A?

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

SI es ve.p., asociado al valor propio $\lambda = 0$

Notar: $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $Av = 0v$

En general: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Nunca es vector propio (por definición)

0 puede ser valor propio.

0 va.p. de $A \leftrightarrow A$ no invertible