Valores y vectores propios

Recordar: Si A es una matriz $n \times n$

① Un vector v $(n \times 1)$ es <u>vector</u> <u>propio</u> de A si

$$v \neq \vec{0} \quad y \quad A v = \underline{\lambda} v$$

para algún escalar $\underline{\lambda}$ (el <u>valor</u> <u>propio</u> de A asociado a v)

② Un número λ es <u>valor</u> <u>propio</u> de A si

existe $v \neq \vec{0}$ (vector $n \times 1$) tal que $A v = \lambda v$

(v es un vector propio de A asociado a λ)

Cómo hallar valores / vectores propios?

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hay que estudiar la ecuación $\underline{A v = \lambda v}$

donde $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y λ es un parámetro.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<u>Valores</u> <u>propios</u>: Que valores de $\underline{\lambda}$ hacen que haya soluciones <u>no</u> <u>nulas</u>?

$$\hookrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vectores propios: Las soluciones no nulas mencionadas

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = \lambda x \\ -x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (3-\lambda)x - 2y = 0 \\ -x + (2-\lambda)y = 0 \end{cases}$$ Sistema homogéneo

Matriz de coeficientes: $\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = A - \lambda I$

Hay soluciones no nulas $\Longleftrightarrow$ es C.I.

$\Longleftrightarrow$ $A - \lambda I$ no invertible.

Hay que hallar λ para que $A - \lambda I$ no sea invertible.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Valores propios: Raíces de $\lambda^2 - 5\lambda + 4$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \begin{cases} \to \lambda = 1 \\ \to \lambda = 4 \end{cases}$$ Valores propios de A

Vectores propios $\to$ asociados al va.p. 1

$\to$ asociados al va.p. 4

$\lambda = 1$

Asociados al 1: Soluciones no nulas de $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3-1 & -2 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix}}_{A - I}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad 2$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \rightarrow y = x$$

Solución: $(x, y) = (x, x) \quad x \in \mathbb{R}$

Vectores propios (de A, asociados a 1): $\boxed{V = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad x \neq 0}$

Vectores propios asociados a 4:

Soluciones no nulas de $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (A - 4I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 3-4 & -2 \\ -1 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \quad -1 \quad \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow x = -2y$ Solución: $(x, y) = (-2y, y) \quad y \in \mathbb{R}$

Vectores propios (de A, asociados a 4): $\boxed{V = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \quad y \neq 0}$

Resumen: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Valores propios: 1 , 4

Vectores propios: asociados a 1: $v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x \neq 0$

asociados a 4: $v = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y \neq 0$

En general: A matriz $n \times n$

Considero $A v = \lambda v$ donde $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ variables

λ parámetro

λ_j

$\longleftrightarrow \quad (A - \lambda I) v = \vec{0}$

$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Sistema homogéneo de matriz $A - \lambda I$

Valores propios: valores de λ tales que $\det(A - \lambda I) = 0$

Polinomio característico de A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Es un polinomio de grado n

Valores propios de A: Raíces de χ_A

$\rightarrow$ A tiene a lo sumo n valores propios

Para cada valor propio $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \leq n)$

Los vectores propios de A asociados a λ_j $(j = 1, \ldots, k)$ son las soluciones no nulas de

$$(A - \lambda_j I) v = \vec{0}$$

Ejemplo : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2+1) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1 \leftarrow \text{Polinomio de grado } 3$$

Raíces : $\underbrace{(2-\lambda)}_{\lambda=2}\underbrace{(\lambda^2+1)}_{\neq 0} = 0$ $\rightarrow$ Valores propios : $\lambda = 2$

Vectores propios : $A - 2I = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} y + 5z = 0 \\ -2y - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow (y, z) = (0,0) \qquad \underline{x \text{ libre}}$$

Vectores propios : $v = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x \neq 0$.

(asociados a $\lambda = 2$)