Diagonalización (Ejemplos)

Recordar: A matriz cuadrada $n \times n$

① A es diagonalizable $\longleftrightarrow$ $A = PDP^{-1}$ con D diagonal

② A es diagonalizable $\longleftrightarrow$ Existe $P = \left(P_1 \middle| \cdots \middle| P_n \right)$ invertible

tal que $P_1, \ldots, P_n$ son vectores propios de A

En ese caso: $A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{D} P^{-1}$ donde λ_j valor propio de A asociado a P_j

---

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Valores / vectores propios: $1 \longrightarrow v_1 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x \neq 0$

(video anterior) $4 \longrightarrow v_2 = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; y \neq 0$

Es A diagonalizable?

$$P = \left(\begin{array}{c:c} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \qquad D = \left(\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{array}\right)$$

P es invertible! $\det P = 1 + 2 = 3$ ✓

$\longrightarrow$ A es diagonalizable y $A = PDP^{-1}$

con $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Se puede verificar, hallando $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

y multiplicando.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Valores / vectores propios: $2 \rightarrow v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \neq 0$

(video anterior)

Es diagonalizable?

$P = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ 0 & \times & \times \\ 0 & & \end{array} \right)$

Todos los vectores propios son múltiplos entre sí

$\rightarrow$ No hay P invertible

$\rightarrow$ A no es diagonalizable.

Polinomio característico y diagonalización

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Si A diagonalizable, con $A = PDP^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\rightarrow \quad A - \lambda I = P(D - \lambda I)P^{-1}$ (ejercicio)

$$\rightarrow \quad \det(A - \lambda I) = \det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

$$\longrightarrow \quad \chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

(raíces: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$)

Entonces: Si $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ son todas las raíces de χ_A

repetidas según su multiplicidad

Ejemplo anterior: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \underbrace{(2-\lambda)}_{\downarrow} \underbrace{(\lambda^2+1)}_{\text{Raíces imaginarias}}$$ ← (video anterior)

$\lambda = 2$

simple

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \times & \\ & & \times \end{pmatrix}$$ → No es diagonalizable

(no precisé hallar los vectores propios)

En general: Si χ_A tiene alguna raíz imaginaria

→ A no es diagonalizable

(con coeficientes en $\mathbb{R}$)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 9 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)^2(-2-\lambda)$$

$$\chi_A(\lambda) = -\underbrace{(7-\lambda)^2}\underbrace{(2+\lambda)}$$

Raíces: 7 doble
-2 simple.

$$\rightsquigarrow \quad D = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

Vectores propios:

1) Asociados al 7: $A - 7I = \begin{pmatrix} 7-7 & 9 & 1 \\ 0 & 7-7 & 1 \\ 0 & 0 & -2-7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{r} 9y + z = 0 \\ z = 0 \\ -9z = 0 \end{array} \right.$$

(variables: x, y, z)

Solución: x libre, $y = z = 0$

Vectores propios (del va.p. 7): $v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x \neq 0$

No es diagonalizable:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 7 & 7 & -2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ 0 & X & \\ 0 & & \end{array}\right) \end{array}$$

→ A no es diagonalizable.

(no precisé hallar los vectores propios asociados al -2)