Diagonalización (Ejemplos)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Es diagonalizable?

1) χ_A y valores propios:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left(\underline{(-2-\lambda)(4-\lambda)} + \underline{8} \right) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-2) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

Raíces: $\lambda_1 = 0$ simple $\rightsquigarrow$ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ doble

(Si A fuera diagonalizable)

2) Vectores propios:

$\underline{\lambda_1 = 0}$: $A - 0I = A \to \begin{cases} -2x + 4y + 4z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \to z = 0$

$\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \to -x + 2y = 0 \to x = 2y$

Solución: $(2y, y, 0)$ y libre

$\lambda_1 = 0 \longrightarrow$ $\boxed{V_1 = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad y \neq 0}$

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $A - 2I = \begin{pmatrix} -2-2 & 4 & 4 \\ -2 & 4-2 & 2 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} -4x + 4y + 4z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ -2 $\quad 0 = 0 \quad \xrightarrow[1/2]{} \quad -x + y + z = 0$

$\rightarrow z = x - y$ $\quad$ $\underline{\text{Solución}}$: $(x, y, x-y)$ $\quad x, y$ libres

Vectores propios (de $\lambda_2 = 2$) :

$$\boxed{V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x-y \end{pmatrix} = x \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} + y \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}} \quad \text{con } (x,y) \neq (0,0)}$$

3) Ver si es diagonalizable (hallar D, P con $A = PDP^{-1}$)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \quad\ 2 \quad\ 2 \end{array}$$

P es invertible ? $\quad \underline{\text{SI}} \rightarrow A$ diagonalizable

① $\det P = -1$ (ejercicio)

② **Teorema**: "Si construyo P con este método, queda invertible"

Para cada valor propio λ, pongo una columna por cada grado de libertad del sistema

$$(A-\lambda I)\,v = \vec{0}$$

No lo probaremos.

Criterio: A diagonalizable $\Longleftrightarrow$ ...
(tamaño $n \times n$)

① χ_A no tiene ninguna raíz imaginaria.

(las multiplicidades de las raíces reales suman n)

② Para cada raíz λ de χ_A:

$$\boxed{\text{Multiplicidad de } \lambda \text{ en } \chi_A} = \boxed{\#\text{ Grados de libertad del sistema } (A-\lambda I)\,v = \vec{0}}$$

(hay vectores propios para poner en las n columnas de P)

En general (A diagonalizable o no):
Si λ es valor propio,

$$\boxed{\text{Multiplicidad de } \lambda \text{ en } \chi_A} \geq \boxed{\#\text{ Grados de libertad del sistema } (A-\lambda I)\,v = \vec{0}} \geq 1$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 5 & 5 & 12 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿Es diagonalizable?

1) χ_A y valores propios:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 5 & 5-\lambda & 12 \\ 1/2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5-\lambda & 12 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 5 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$+ \quad - \quad +$ $\qquad 0 \qquad 0$

$$= \frac{1}{2}(-1)(-4)(5-\lambda) - \lambda(3-\lambda)(5-\lambda)$$

$$= 2\underline{(5-\lambda)} - \lambda(3-\lambda)\underline{(5-\lambda)} = (5-\lambda)\big(2-\lambda(3-\lambda)\big)$$

$$= \underline{(5-\lambda)}\,(\underline{\lambda^2 - 3\lambda + 2})$$

Raíces: $\lambda_1 = 5$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 2$

Criterio → A es diagonalizable, pues:

① Todas las raíces de χ_A son reales: $\left.\begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right\}$ simples

② $\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 5 \to v_1 \\ \lambda_2 = 1 \to v_2 \\ \lambda_3 = 2 \to v_3 \end{matrix}\right\}$ 1 grado de libertad ✓

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \left(v_1 \;\vdots\; v_2 \;\vdots\; v_3 \right)$$

Es invertible (Teorema)

$\rightarrow \quad A = PDP^{-1}$

<u>En</u> <u>general</u> : A matriz $n \times n$

Si todas las raices de χ_A son reales y simples

$\longrightarrow$ A es diagonalizable.

(Cuidado: No vale el recíproco (ver 1^{er} ejemplo))