Diagonalización (parte 1).

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calcular A^{100}.

Semejanza: Decimos que dos matrices cuadradas A y B son **semejantes** si existe una matriz invertible P tal que
$$B = PAP^{-1}$$

Proposición: Si A y B son semejantes entonces $\det(A) = \det(B)$.

Dem: A y B semejantes
$\rightarrow$ existe P invertible tal que
$$B = PAP^{-1}$$
$$\Rightarrow \det(B) = \det(PAP^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \det(P^{-1}) =$$
$$= \cancel{\det(P)} \det(A) \cdot \frac{1}{\cancel{\det(P)}} = \det(A).$$

Proposición: A y B semejantes.

$\Rightarrow$ A^k y B^k son semejantes para todo natural k con la misma P.

Dem: $B = PAP^{-1}$ con P invertible.

$$B^2 = (PAP^{-1})^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA\underbrace{(P^{-1}P)}_{= I}AP^{-1}$$

$$= PAAP^{-1} = PA^2P^{-1}$$

$\Rightarrow$ B^2 y A^2 son semejantes con la misma P que A y B.

$$B^k = (PAP^{-1})^k = PA\underbrace{P^{-1}P}_{= I}A\underbrace{P^{-1}P}_{I}\dots\underbrace{P^{-1}P}_{= I}AP^{-1} = PA^kP^{-1}.$$

¿Para qué me sirve esto?

Si A es semejante a una matriz diagonal D, existe P invertible tal que

$$D = PAP^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad D^k = PA^kP^{-1} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^k = P^{-1} D^k P}$$

esto es "fácil" de calcular

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

¿ Será semejante a una diagonal ?

Pongamos que $A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$

$$\Rightarrow A - \lambda_1 I = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P - \lambda_1 P^{-1} P =$$

$$= P^{-1} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \right) P =$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} P$$

$$\Rightarrow \boxed{\det(A - \lambda_1 I) = 0}$$

Lo mismo con λ_2

¿ Existe λ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$?

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)+2 =$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5\pm 1}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

¡Hay 2 lambdas! Justo lo que necesitamos.

¿Existe P invertible tal que $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Escribamos $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \hline P_2 \end{pmatrix}$ filas de P

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow PA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P$$

$$PA = \begin{pmatrix} P_1 A \\ \hline P_2 A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 3P_1 \\ \hline 2P_2 \end{pmatrix}$$

Si quiero que sean iguales debo tener

$$P_1 A = 3P_1 \quad \text{y} \quad P_2 A = 2P_2 .$$

Si escribimos $P_1 = (x, y)$

$$(x,y)A = (3x, 3y) \rightarrow (x,y)\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (3x, 3y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+y=3x \\ -2x+y=3y \end{cases} \to \begin{cases} x+y=0 \\ -2x-2y=0 \end{cases}$$

C.I.

$\boxed{y=-x}$ Sol: $(x,-x)$

Por ejemplo $(1,-1)$ es solución.

Análogamente hallamos P_2.

$P_2=(x,y) \Rightarrow (x,y)A=(2x,2y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+y=2x \\ -2x+y=2y \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y=0 \\ -2x-y=0 \end{cases}$$

C.I.

Sol. $(x,-2x)$ por ejemplo $(1,-2)$ es solución.

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \end{array}$$

es invertible, $\det(P)=-1\neq 0$

Esta P verifica $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = PAP^{-1}$

$$\Rightarrow A^{100}=P^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100} P = P^{-1}\begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} P$$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Haciendo la cuenta nos queda

$$\boxed{A^{100} = \begin{pmatrix} 2\times 3^{100} - 2^{100} & -2\times 3^{100} + 2^{101} \\ 3^{100} - 2^{100} & -3^{100} + 2^{101} \end{pmatrix}}.$$

$3^{100} \gg 2^{100}$ $\qquad 3^{100} \approx 0{,}5 \times 10^{48}$

$$\Rightarrow \quad A^{100} = \begin{pmatrix} 2(3^{100} - 2^{99}) & -2(3^{100} - 2^{100}) \\ 3^{100} - 2^{100} & -3^{100} + 2^{101} \end{pmatrix}$$

$$\approx 0{,}5 \times 10^{48} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalización: valores y vectores propios.

Definición: Una matriz cuadrada se dice **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal.

Algunas observaciones:

1) $A \in M_n$ es diagonalizable si existe P invertible y D diagonal tal que

$$AP = PD.$$

Antes escribimos

$$PA = DP,$$

pero es equivalente si cambiamos P por P^{-1}. Los sistemas que planteamos para las filas de la matriz invertible los debemos sustituir por sistemas para las columnas. Es decir, si queremos encontrar P invertible tal que

$$AP = PD \quad \text{con } D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

escribimos $$P = (P_1 \mid P_2 \mid \cdots \mid P_n)$$

columnas de P

y tenemos
$$AP = (AP_1 \mid AP_2 \mid \cdots \mid AP_n)$$

$\Rightarrow$ Tenemos que resolver los sistemas
$$AP_i = \lambda_i P_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

2) Diagonalizar A es "lo mismo" que diagonalizar A^t.
Supongamos que existe P invertible tal que
$$AP = PD$$
con D diagonal.

$$\Rightarrow (AP)^t = (PD)^t = D^t P^t = D P^t$$
$$(AP)^t = P^t A^t$$

$$\Rightarrow A^t \underbrace{(P^t)^{-1}}_{\text{es invertible.}} = (P^t)^{-1} D$$

$\Rightarrow \exists\ Q$ invertible t.q. $A^t Q = Q D$.

3) Si A y B son semejantes y A es diagonalizable, entonces B también es diagonalizable.

<u>Definición</u>:

- Un valor propio de $A \in M_n$ es un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$\det(A - \lambda I) = 0.$$
Esto es equivalente a decir que el sistema
$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
es compatible indeterminado.

- Un vector propio de A asociado al valor propio λ es un vector que es solución no trivial del sistema
$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
equivalentemente $(x_1, \dots, x_n)$ es vector propio si
$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Proposición: Si $A \in M_n$, entonces

$\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n en λ.

Este polinomio se denota por $\chi_A(\lambda)$ y se llama polinomio característico de A.

Demostración:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

Cuando desarrollamos nos queda que el término de mayor grado en λ es $(-\lambda)^n$ ya que uno de los sumandos es

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

y no hay cosas de grado mayor en λ.