# Modelo de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1ᵉʳ fila:

$a_1, \dots, a_n \geq 0$ y alguna $> 0$

Sub-diagonal:

$b_1, \dots, b_{n-1}$ con $0 < b_i \leq 1$

Objetivo: Dada $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ distribución inicial,

estimar $X^{(k)} = L^k X^{(0)}$ cuando $k$ es grande.

$L^k \rightarrow$ será útil conocer vectores / valores propios, diagonalización (si es posible)

Teorema 1: $L$ matriz de Leslie, entonces:

1) Tiene un único valor propio positivo $\lambda_1 > 0$, y es simple.

2) Un vector propio asociado a $\lambda_1$ es:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_1 \cdots b_{n-1}/\lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

Notar:

tiene entradas $> 0$

Otro vect. prop. asociado a $\lambda_1$ es múltiplo de $V_1$

3) Si $\lambda_i$ es otro valor propio de $L \Rightarrow \lambda_1 \geq |\lambda_i|$

Ejemplo: $L = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 48 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio: $\chi_L(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 10\lambda + 8$

Raices: $-1$ (verifico) $\to$ Ruffini: $-2$

$4 = \lambda_1$

Notar: $\lambda_1 = 4 > 2 = |-2|,\ 1 = |-1|$.

Vector propio asociado a $\lambda_1 = 4$:

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/8 \\ 1/96 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{b_1}{\lambda_1} = \frac{(1/2)}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} = \frac{(1/2)(1/3)}{16} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{96}$$

Se puede verificar que es vector propio de $L$, asociado a $\lambda_1 = 4$

---

Si $L = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 48 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ y $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

con $x_0, y_0, z_0 \geq 0$, alguno $> 0$

Intento estimar $X^{(k)} = L^k X^{(0)}$ para $k$ grande:

Notar: $L$ es diagonalizable, $L = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ 1/8 & V_2 & V_3 \\ 1/96 & & \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ v_1 \end{array}$$

Se podría calcular:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 6 \\ 1/8 & -6 & -3 \\ 1/96 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{180} \begin{pmatrix} 96 & 576 & 1152 \\ 5 & -30 & -120 \\ -6 & 24 & 288 \end{pmatrix}$$

---

$$X^{(k)} = L^k X^{(0)} = PD^k \underbrace{P^{-1} X^{(0)}}$$

cambio de variable:
(para la condición inicial)

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = P^{-1} X^{(0)} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(k)} = PD^k \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= c_1 4^k v_1 + c_2 (-2)^k v_2 + c_3 (-1)^k v_3$$

$$X^{(k)} = c_1 4^k v_1 + c_2 (-2)^k v_2 + c_3 (-1)^k v_3$$

Estimación con $k$ grande : $4^k \gg 2^k = |(-2)^k| \gg 1 = |(-1)^k|$

Si además $c_1 > 0$ : $c_1 4^k \gg |c_2(-2)^k| , |c_3(-1)^k|$

Usando $P^{-1}$: $c_1 = \frac{1}{180}(96 x_0 + 576 y_0 + 1152 z_0) > 0$

---

$$X^{(k)} = \underbrace{c_1 4^k v_1}_{\text{estimación}} + \underbrace{c_2 (-2)^k v_2 + c_3 (-1)^k v_3}_{\text{error relativo}}$$

$X^{(k)} \sim c_1 4^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1/8 \\ 1/96 \end{pmatrix}$ si $k$ es grande.

sólo $c_1$ depende de $X^{(0)}$

Conclusiones: 1ro) Las poblaciones crecen
(exponencial de base 4)

2do) Las <u>proporciones</u> de $X^{(k)}$ se estabilizan, a las de $v_1$

$$(x_k : y_k : z_k) \sim (1 : 1/8 : 1/96)$$

Osea : $\frac{y_k}{x_k} \to \frac{1}{8}$ , $\frac{z_k}{x_k} \to \frac{1}{96}$

Teorema 2 : $L$ matriz de Leslie que cumple :

1) $a_n > 0$ (última clase es fértil)

2) Hay algún $i$ con $a_i, a_{i+1} > 0$ (hay clases consecutivas fértiles)

Sea $X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$ con $x_i^{(0)} \geq 0$, alguno $> 0$

Entonces : $X^{(k)} = L^k X^{(0)} \sim c_1 \lambda_1^k v_1$ si $k$ es grande.

donde : $\lambda_1$ valor propio $> 0$, $v_1$ vector propio asociado a $\lambda_1$

$c_1$ depende de $X^{(0)}$

Ejemplo: $L = \begin{array}{cccc} & & a_2 & a_3 \\ & & \downarrow & \downarrow \\ & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 2 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

Condiciones:

1) $a_3 > 0$ ✓

2) Para $i = 2$ tengo $a_2, a_3 > 0$ ✓

Entonces $X^{(k)} \sim c_1 \lambda_1^k v_1$ $\longleftarrow$ hay que hallar $\lambda_1, v_1$

($k$ grande)

Para hallar $\lambda_1$: $\chi_L(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4}$ (ejercicio)

Tiene raíz 1 $\longrightarrow$ $\boxed{\lambda_1 = 1}$

$$\boxed{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{b_1}{\lambda_1} = \frac{(1/4)}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} = \frac{(1/4)(1/2)}{1} = \frac{1}{8}$$

Si $k$ es grande: $X^{(k)} \sim c_1 \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}$ donde $c_1$ depende de $X^{(0)}$

A la larga la población se estabiliza: tiende a un estado de equilibrio (a $c_1 v_1$)

Proporciones de equilibrio $\left(1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}\right)$

En general, en las condiciones del Teorema 2 tengo

$$X^{(k)} \sim c_1 \lambda_1^k v_1 \quad \text{si } k \text{ es grande}$$

Conclusiones:

La población:

1ro) $\lambda_1 > 1$ : crece (exponencial c/base $\lambda_1$)

$\lambda_1 = 1$ : Se estabiliza (estado de equilibrio $c_1 v_1$)

$\lambda_1 < 1$ : Se extingue (decrecimiento exponencial c/base $\lambda_1$)

2do) Las proporciones de $X^{(k)}$ se estabilizan a las de $v_1$