Modelo de Leslie

Polinomio característico:

$n=2$:
$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 \\ b_1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(a_1-\lambda) - a_2 b_1$$

$$\boxed{\chi_L(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2 b_1}$$

$n=3$:
$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_L(\lambda) = \begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & b_2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(a_1-\lambda) + a_3 b_1 b_2 - (-\lambda) a_2 b_1$$

$$\begin{matrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 \\ b_1 & -\lambda & 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{\chi_L(\lambda) = -\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2 b_1 \lambda + a_3 b_1 b_2}$$

n general:
$$L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\chi_L(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} \cdots - a_n b_1 \cdots b_{n-1} \right)}$$

Criterio del "R"

Recordar:

① L matriz de Leslie $\rightarrow$ tiene un único valor propio positivo λ_1

② Para muchas matrices de Leslie (condiciones del Teorema 2)

la población $\rightarrow$ crece si $\lambda_1 > 1$

$\rightarrow$ se estabiliza si $\lambda_1 = 1$

$\rightarrow$ se extingue si $\lambda_1 < 1$

Hallar $\lambda_1 \leftrightarrow$ Raíces de χ_L, puede ser difícil.

Criterio: $L = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ matriz de Leslie

Sea $\boxed{R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \cdots + a_n b_1 \cdots b_{n-1}}$

Entonces: $R > 1 \rightarrow \lambda_1 > 1$

$R = 1 \rightarrow \lambda_1 = 1$

$R < 1 \rightarrow \lambda_1 < 1$

Notar: 1) Si λ_1 clasifica el crecimiento/decrecimiento/estabilidad $\rightarrow$ R también

2) R es fácil de calcular.

Ejemplo: $L = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Notar: Se cumplen las condiciones del Teorema 2

1) $a_2 > 0$ ✓

2) $a_1, a_2 > 0$ ✓

$\rightarrow$ λ_1 clasifica el comportamiento.

$$R = a_1 + a_2 b_1 = 3 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 7 > 1$$

$$\chi_L(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow -1$$

$$\searrow 4 = \lambda_1 > 1 \checkmark$$

Notar: $R = 7 \neq 4 = \lambda_1$

Ejemplo:

$$L = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \downarrow & \downarrow\downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2/3 & 4 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Condiciones Teorema 2

1 ✓

2 ✓

$\rightarrow$ λ_1 clasifica el comportamiento

$\rightarrow$ R también

$$R = \underline{a_1} + \underline{a_2 b_1} + \underline{a_3 b_1 b_2} + \underline{a_4 b_1 b_2 b_3}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}} + \underline{0 \cdot \frac{1}{3}} + \underline{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} + \underline{4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{9}$$

$R = \frac{7}{9} < 1$ $\rightarrow$ Población se extingue

Observar: R no nos dice:

→ Velocidad de crecimiento / decrecimiento
(exponencial de base λ_1)

→ Proporciones límite
(v_1 vector propio asociado a λ_1)

Interpretación de R: cantidad promedio de hijas de una hembra a lo largo de su vida.

Notar: es coherente con el criterio: $R > 1 \to$ crece
$R < 1 \to$ decrece
$R = 1 \to$ se estabiliza

Justifico para $n = 3$:

Sigo una generación de hembras (empiezan N en clase 1) y calculo cuantas hijas tienen en total:

tiempo	# Generación	# hijas
$K=1$	N (clase 1)	$a_1 N$
$K=2$	$b_1 N$ (clase 2)	$a_2 \underbrace{b_1 N}$
$K=3$	$b_2 b_1 N$ (clase 3)	$a_3 \underbrace{b_2 b_1 N}$
$K=4$	0	

$$\left.\begin{array}{l} a_1 N \\ + \\ a_2 b_1 N \\ + \\ a_3 b_2 b_1 N \end{array}\right\} \text{total de hijas}$$

$$\# \text{ hijas} = a_1 N + a_2 b_1 N + a_3 b_1 b_2 N$$

$$= (a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2) N = R N$$

$$\text{Promedio } \# \text{ hijas} = \frac{\# \text{ hijas}}{N} = R \quad \checkmark$$

Casos en que NO se cumplen las condiciones del Teorema 2:

① $a_n > 0$

② Existe i tal que $a_i, a_{i+1} > 0$

Recordar: Si L cumple ① y ②:

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ $\longrightarrow$ $X^{(k)} \sim c_1 \lambda_1^k v_1$, si k grande,

para cualquier $X^{(0)}$ población inicial $\neq \vec{0}$

Ejemplo: $L = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

① ✗

② ✓

Se puede calcular: $\lambda_1 = 4$ → Población crece ?

Si tomo $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \to X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X^{(k)} \quad k \geq 1$

La población no crece para esta condición inicial.

→ El comportamiento depende de $X^{(0)}$.

hay otras condiciones iniciales donde la población crece,

p.ej

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/8 \\ 1/32 \end{pmatrix}$ si $X^{(0)} = v_1 \to X^{(k)} = \lambda_1^k v_1$

Se puede "arreglar" considerando el modelo hasta la última clase fértil

$L = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si $X^{(0)} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}} \\ z_0 \end{pmatrix}$

tiene $x_0 > 0$ o $y_0 > 0$

→ la población crece

$(\lambda_1 = 4)$

Ejemplo: $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ① ✓ ② ✗

Ejercicio: $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ → Población se estabiliza?

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow X^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} \longrightarrow X^{(4)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots$$

$X^{(k)}$ tiene comportamiento <u>cíclico</u>

→ No se estabiliza

→ Proporciones de $X^{(k)}$ <u>no</u> se estabilizan a $(1:1)$

Tomando la duración de las clases de edad (la unidad de tiempo) lo bastante corta, es esperable que haya clases fértiles consecutivas.

<u>osea</u>: que se cumpla la condición ②