Notas para el curso de Matemática II, módulo 2
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Andrés Abella

5 de diciembre de 2021

Índice

Advertencia. Estas notas no contienen imágenes (dibujos, gráficas, etc.) sin las cuales hay partes del texto que son difíciles de entender. Las imágenes correspondientes van a ser presentadas en clase.

1. Repaso de geometría

En este tema, como es costumbre, identificamos el plano con el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \; x, y \in \mathbb{R}\}$.

Rectas. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a y b no ambos nulos, la ecuación $ax + by = c$ representa una recta en el plano, es decir los puntos de coordenadas (x_0, y_0) que verifiquen $ax_0 + by_0 = c$ van a estar todos sobre una misma recta. Por ejemplo podemos considerar la recta r de ecuación $2x + 3y = 6$. Para dibujar la recta alcanza con determinar dos puntos de la misma; en este caso podemos tomar $(0, 2)$ y $(3, 0)$ que son los puntos de corte con los ejes coordenados. Notar que la ecuación de r también puede escribirse (despejando la variable y) mediante $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Si escribimos la ecuación de una recta r en la forma $y = mx + n$, entonces a m se le llama el *coeficiente angular* y a n la *ordenada en el origen*, de r. Los nombres anteriores vienen de que es $m = \tan(\alpha)$, siendo α el ángulo que forma r con el eje Ox, y el punto $(0, n)$ es el corte de r con el eje Oy.

Vectores. A los puntos del plano se les suele llamar *vectores*, pensando el punto de coordenadas (a, b) como el extremo del vector (flecha) que va del *origen* $(0, 0)$ a (a, b). En el plano $\mathbb{R}^2$ se define la *suma* de vectores y el *producto* de un escalar por un vector mediante

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \qquad t(a, b) := (ta, tb),$$

siendo (a, b) y (c, d) vectores del plano y t un número real. Esas operaciones coinciden con la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar de física. La *resta* de vectores se define mediante

$$(a, b) - (c, d) := (a - c, b - d).$$

La *norma*[1] de un vector $v = (v_1, v_2)$ se define mediante $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ y mide la longitud de v. La norma se utiliza para medir la distancia entre dos puntos: dados $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$, la *distancia* entre v y w se calcula mediante $\|v - w\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2}$.

Un *versor* es un vector de norma 1. Notar que si $v = (v_1, v_2)$ es un vector no nulo, entonces

$$\frac{v}{\|v\|} := \frac{1}{\|v\|}v = \left(\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}\right)$$

es un versor colineal con el vector v. Los versores se suelen usar para definir direcciones.

Circunferencias. La circunferencia de centro (a, b) y radio R está formada por los puntos que distan de (a, b) una distancia R, es decir los puntos que sus coordenadas verifican la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Por ejemplo, la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5 tiene ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Otro ejemplo: la circunferencia de centro $(1, -2)$ y radio 3 tiene ecuación $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Operando se obtiene que esa ecuación equivale a $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$. Recíprocamente, toda ecuación de ese tipo representa una circunferencia. Por ejemplo, si consideramos la ecuación $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$, entonces

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + 4x) + (y^2 + 6y) + 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + 12 = 0$$

luego esa ecuación equivale a $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$, que representa una circunferencia de centro $(-2, -3)$ y radio $R = 1$.

[1] En física a la norma se le suele llamar el *módulo*.

Cónicas. Las *cónicas* son la elipse, parábola e hipérbola. Por ejemplo

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1; \quad y=x^2+2x+1; \quad x=y^2+y-1; \quad x^2-y^2=1.$$

La primera es la ecuación de una elipse, la segunda de una parábola de eje paralelo a Oy, la tercera de una parábola de eje paralelo a Ox y la cuarta de una hipérbola. La circunferencia es un caso particular de elipse.

Regiones del plano. Si consideramos la recta $2x+3y=6$, esta divide al plano en dos semiplanos de ecuaciones

$$2x+3y<6 \quad \text{y} \quad 2x+3y>6.$$

Estas son las ecuaciones de los semiplanos sin el borde (que es la recta), las ecuaciones de los semiplanos con borde son

$$2x+3y\leq 6 \quad \text{y} \quad 2x+3y\geq 6.$$

Lo mismo sucede con las cónicas. Por ejemplo la circunferencia $\mathcal{C}:\ x^2+y^2=4$, determina dos regiones: el interior de $\mathcal{C}$ dado por $x^2+y^2<4$ y el exterior dado por $x^2+y^2>4$. La parábola $y=x^2$ divide al plano en las regiones $y<x^2$ y $y>x^2$, etcétera. De esta forma se pueden describir distintas regiones del plano. Por ejemplo el conjunto $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0\}$ corresponde al semidisco de centro en el origen y radio 1, que queda por arriba del eje Ox.

2. Funciones de varias variables

En esta sección estudiaremos funciones de la forma $f:D\to\mathbb{R}$, siendo su dominio D un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Muchas veces será $D=\mathbb{R}^2$.

Ejemplos 2.1. 1. La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=2x+y$, es una función de tipo *lineal*.

2. La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=2x^2+3y^2$, es de tipo *cuadrático*.
3. Observar que la función dada por $f(x,y)=\frac{x}{y}$ no puede definirse en todo $\mathbb{R}^2$, ya que la expresión $\frac{x}{y}$ no está definida para $y=0$. En general, dada una expresión $f(x,y)=\cdots$, tomaremos como dominio de la función f al mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para el cual esa fórmula tiene sentido. En el caso de $f(x,y)=\frac{x}{y}$, tomaremos como dominio el conjunto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\neq 0\}$.
4. Para $f(x,y)=\sqrt{x+y-1}$, su dominio es $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\geq 1\}$, esto representa un semiplano de borde la recta de ecuación $x+y=1$.

Dada una función $f:D\to\mathbb{R}$, su *gráfico* es el conjunto

$$\mathrm{Gr}(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in D \text{ y } z=f(x,y)\right\}.$$

En general el gráfico de f es una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Ejemplos 2.2. 1. Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está definida por $f(x,y)=1$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ (una función constante), entonces su gráfico es

$$\mathrm{Gr}(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=1\right\}.$$

Luego $\mathrm{Gr}(f)$ es un plano paralelo al plano xy.

2. Consideremos $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2+y^2$. Su gráfico es

$$\mathrm{Gr}(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z=x^2+y^2\right\}.$$

La superficie correspondiente es un *paraboloide.*

En general es difícil de interpretar geométricamente el gráfico de una función de varias variables. Para eso se suele cortar el gráfico con planos horizontales de ecuación $z=k$ (k es una constante arbitraria); luego se hace variar k y se estudian esas intersecciones a ver qué nos dan. La proyección de esas interesecciones sobre el plano xy son las *curvas de nivel* de la función $f:D\to\mathbb{R}$, y están definidas por

$$\mathcal{C}_k=\{(x,y)\in D:\ f(x,y)=k\},\quad k\in\mathbb{R}.$$

Por ejemplo, para $f(x,y)=x^2+y^2$, las curvas de nivel son los conjuntos $\mathcal{C}_k=\{(x,y)\in D:\ x^2+y^2=k\}$. En este caso, si $k<0$, entonces $\mathcal{C}_k$ es el conjunto vacío, si $k=0$, entonces $\mathcal{C}_k=\{(0,0)\}$ (es un punto) y si $k>0$, entonces $\mathcal{C}_k$ es un circunferencia de centro en el origen $(0,0)$ y radio $\sqrt{k}$. Esto nos ayuda a hacernos una imagen tridimensional del gráfico de la función.

3. Diferenciabilidad

En esta sección nos introducimos en el estudio de la "diferenciabilidad" de funciones, que es la generalización a varias variables de la derivabilidad en una variable.

Empezamos dando una definición intuitiva de continuidad. Decimos que una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es *continua* si en su gráfico no aparecen saltos abruptos, es decir si cada vez que dos puntos están cerca, entonces sus imágenes también se mantienen cerca. En general todas las funciones que vamos a considerar son continuas, así que no vamos a tener que preocuparnos por chequearlo. En el caso en que aparezca una función que no es continua, lo diremos expresamente y tendremos los cuidados necesarios.

3.1. Derivadas parciales y gradiente

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función. La *derivada parcial de f respecto a x* es la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ obtenida dejando la variable y fija y derivando respecto a la variable x. Por ejemplo, si es $f(x,y)=x^2y^3+5x$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^3+5$. Análogamente se define la derivada parcial respecto a y, intercambiando los roles de x e y. En el ejemplo anterior es $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2y^2$. También escribiremos f_x en vez de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y f_y en vez de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Aplicación 3.1. La *ley general de los gases* dice que vale la fórmula siguiente

$$\frac{PV}{T}=k,$$

donde P es la presión, V el volumen, T la temperatura y k es una constante que depende de la masa del gas. Esa fórmula permite despejar cada una de las variables P,V,T en función de las otras dos

$$P=\frac{kT}{V},\qquad V=\frac{kT}{P},\qquad T=\frac{PV}{k}.$$

Por ejemplo la fórmula $P=\frac{kT}{V}$ expresa la presión en función de la temperatura y el volumen. Si calculamos sus derivadas parciales obtenemos $\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{k}{V}$ y $\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{kT}{V^2}$. La fórmula $\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{k}{V}$, nos dice que si mantenemos el volumen constante, entonces la presión crece a medida que crece la temperatura, y la tasa de crecimiento es constante y vale $\frac{k}{V}$. Por otro lado de $\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{kT}{V^2}$ deducimos que si mantenemos la temperatura constante, entonces la presión decrece a medida que crece el volumen, y la tasa con que decrece va disminuyendo con el incremento del volumen.

Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un punto $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, se define el *gradiente* de f en p mediante

$$\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \, \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right).$$

Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2y^3 + 5x$, entonces $\nabla f(x, y) = \left(2xy^3 + 5, \, 3x^2y^2\right)$. El gradiente concentra la información de las dos derivadas parciales.

3.2. Derivadas direccionales

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto y $v = (v_1, v_2)$ un versor. La *derivada direccional* de f respecto a v en p es el número $D_v f(p)$ definido mediante

$$D_v f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a, b)}{t}.$$

Notar que las derivadas direccionales podrían no existir (al igual que las derivadas parciales), pero en nuestro caso eso no va a pasar. La derivada direccional $D_v f(p)$ nos da información sobre cómo se curva el gráfico de f en la dirección del versor v (en forma análoga a lo que ocurre con la derivada en una variable). Cuanto mayor sea el valor de la derivada direccional $D_v f(p)$, mayor va a ser la pendiente en esa dirección.

Una imagen que puede ayudar a entender el concepto de derivada direccional es pensar el gráfico de la función f como una superficie en la tierra, con sus colinas, valles y hondonadas. En ese contexto, el versor v lo que marca es una dirección, como pueden ser los puntos cardinales norte, sur, este y oeste, o cualquier otra dirección intermedia. Si pensamos que estamos parados en algún punto de la ladera de una colina (determinado por p, que serían sus coordenadas) y miramos en alguna dirección (dada por v), entonces $D_v f(p)$ nos está dando la pendiente en esa dirección.

Observación 3.2. El conjunto $\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ definido por $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ se llama la *base canónica*[2] del plano $\mathbb{R}^2$. Notar que e_1 y e_2 son dos versores perpendiculares. Si calculamos la derivada direccional $D_{e_1} f(a, b)$ obtenemos

$$D_{e_1} f(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_1) - f(p)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Luego $D_{e_1} f = \frac{\partial f}{\partial x}$. Análogamente se prueba que vale $D_{e_2} f = \frac{\partial f}{\partial y}$. Esto muestra que las derivadas parciales son un caso particular de derivadas direccionales.

En lo que sigue asumimos que las funciones tiene derivadas parciales y que estas son funciones continuas (esto es lo que suele suceder en la práctica).

Teorema 3.3. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ un punto y $v = (v_1, v_2)$ un versor. Entonces la derivada direccional $D_v f(p)$ se puede calcular mediante*

$$D_v f(p) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(p) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(p). \quad \square$$

Notar que si $v = (v_1, v_2)$ es un vector no nulo y $v_0 = \frac{v}{\|v\|}$ es el versor en la dirección de v, entonces

$$D_{v_0} f(p) = \frac{1}{\|v\|} \left(v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(p) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right). \tag{1}$$

[2]En física se suele escribir $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$ en vez de e_1 y e_2.

Ejemplo 3.4. Sea $f(x,y) = x^2y^3$. Vamos a calcular $D_v f(p)$ para $p = (1,-1)$ y $v = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)$. Las derivadas parciales de f son $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$. Luego $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = -2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = 3$ y por lo tanto

$$D_v f(1,-1) = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(3 \times \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) + 2 \times \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(3 \times (-2) + 2 \times 3\right) = 0.$$

Luego obtuvimos $D_v f(1,-1) = 0$. Eso nos dice que el gráfico de f en $p = (1,-1)$ tiene una tangente horizontal en la dirección del vector v.

El siguiente teorema, nos dice que el gradiente de una función nos da la dirección en la cual hay mayor crecimiento de la función.

Teorema 3.5. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $p \in \mathbb{R}^2$ un punto del plano en el cual el gradiente de f no se anula. Consideremos el versor $v_0 = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$. Entonces vale*

$$|D_w f(p)| \leq D_{v_0} f(p) = \|\nabla f(p)\|$$

para todo versor w.

Dem. Solo probaremos que vale $D_{v_0} f(p) = \|\nabla f(p)\|$, dado que la desigualdad es más difícil de probar. Si aplicamos la fórmula (1) tomando como $v = (v_1, v_2)$ al gradiente $\nabla f(p) = (f_x(p), f_y(p))$, es decir, tomando $v_1 = f_x(p)$ y $v_2 = f_y(p)$, obtenemos

$$\begin{aligned} D_{v_0} f(p) &= \frac{1}{\|v\|}\left(v_1 f_x(p) + v_2 f_y(p)\right) = \frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\left(f_x(p) f_x(p) + f_y(p) f_y(p)\right) = \frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\left(\left(f_x(p)\right)^2 + \left(f_y(p)\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\|\nabla f(p)\|}|\nabla f(p)\|^2 = \|\nabla f(p)\|. \quad \square \end{aligned}$$

También vale el siguiente resultado.

Teorema 3.6. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función, $p \in \mathbb{R}^2$ un punto del plano y $\mathcal{C}$ la curva de nivel que pasa por p. Entonces el gradiente $\nabla f(p)$ es perpendicular a la tangente en p a la curva $\mathcal{C}$.* $\square$

Observación 3.7. Si mantenemos la analogía del gráfico de la función f como una superficie en la tierra y nos fijamos en un punto de esta superficie (determinado por p, que son sus coordenadas), entonces el gradiente $\nabla f(p)$ es perpendicular a la curva de nivel que pasa por p y nos da la dirección en la cual hay mayor pendiente.

Ejemplo 3.8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$. El gradiente de f es $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$. Si consideramos el punto $p = (1,1)$, entonces $\nabla f(1,1) = (2, -2)$ y $\|\nabla f(1,1)\| = \|(2, -2)\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. Luego la dirección de mayor crecimiento de f en torno a p es la del versor $v_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, -2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$. La pendiente en esa dirección está dada por la derivada direccional: $D_{v_0} f(p) = \|\nabla f(p)\| = 2\sqrt{2}$.

4. Extremos

En esta sección estudiaremos la existencia de máximos y mínimos en funciones de dos variables. Como siempre asumiremos que las funciones son "buenas"y tienen derivadas parciales en todos los puntos.

4.1. Extremos absolutos y relativos

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función, siendo D un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Decimos que f tiene un *máximo absoluto* en $(a,b) \in D$ si vale $f(x,y) \leq f(a,b)$, para todo $(x,y) \in D$. En ese caso decimos que $f(a,b)$ es el *máximo* de f. Análogamente decimos que f tiene un *mínimo absoluto* en $(a,b) \in D$ si vale $f(x,y) \geq f(a,b)$, para todo $(x,y) \in D$ y en ese caso a $f(a,b)$ lo llamamos el *mínimo* de f. El máximo y el mínimo son los *extremos absolutos* de la función.

Como sucede en una variable, una función puede tener o no tener máximo y/o mínimo.

Ejemplo 4.1. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$. Como es $x^2 + y^2 \geq 0$, entonces vale $f(x,y) \geq 1$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; además es $f(0,0) = 1$. Luego 1 es el mínimo de f y lo alcanza en $(0,0)$. Por otro lado es $f(x,0) = x^2 + 1$, y por lo tanto $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty$. Esto implica que f toma valores arbitrariamente grandes y por lo tanto no tiene máximo.

Ejemplo 4.2. Si consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, entonces de $-x^2 - y^2 \leq 0$ deducimos $g(x,y) \leq 1 = f(0,0)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego 1 es el máximo de f y lo alcanza en $(0,0)$. Un razonamiento análogo al del ejemplo anterior prueba que f no tiene mínimo.

Ejemplo 4.3. Consideremos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x + y$. Como es $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$, deducimos que f no tiene ni máximo ni mínimo.

Ejemplo 4.4. Ahora si consideramos de nuevo la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, pero tomamos como dominio el conjunto $D = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (D es un disco de centro $(0,0)$ y radio 1), entonces 1 sigue siendo el mínimo de f pero ahora vale $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 \leq 1 + 1 = 2$, para todo $(x,y) \in D$. Además si (a,b) es un punto del borde de D, es decir si verifica $a^2 + b^2 = 1$, entonces vale $f(a,b) = 2$. Luego $f : D \to \mathbb{R}$ tiene mínimo 1 que lo alcanza en $(0,0)$ y máximo 2 que lo alcanza en todos los puntos del borde de D.

Decimos que f tiene un máximo relativo en $(a,b) \in D$ si $f(a,b)$ es un valor máximo de f en las cercanías de (a,b). Análogamente se define un *mínimo relativo*, cambiando máximo por mínimo. Decimos que f tiene un *extremo relativo* en $(a,b) \in D$ si f tiene un máximo o mínimo relativo en (a,b).

Si pensamos el gráfico de una función $f : D \to \mathbb{R}$ como la superficie de un territorio, entonces los máximos relativos corresponden a los topes de las colinas, mientras que los mínimos relativos corresponden a los puntos más bajos de las hondonadas. Con esa idea, el máximo (absoluto) de f corresponde al punto más alto del territorio y el mínimo al más bajo.

Los extremos absolutos nos dan infomación sobre el comportamiento de la función en todo su dominio, dado que nos dicen si existe un valor que es el máximo o mínimo posible que puede tomar la función. Por otro lado los extremos relativos nos dan infomación sobre el comportamiento de la función en las cercanías de un punto, pero no sobre lo que sucede al alejarnos de ese punto. Dependiendo del problema que estemos estudiando, nos van a interesar los extremos absolutos o relativos. Notar que todo extremo absoluto es también un extremo relativo, pero el recíproco en general no es cierto.

4.2. Determinación de extremos relativos

Si volvemos a la analogía del gráfico de una función como la superficie de un territorio en la cual los máximos relativos corresponden a los topes de las colinas, recordando que las derivadas direccionales nos dan la pendiente que hay en el lugar, obtenemos que en un máximo relativo todas las derivadas direccionales van a ser nulas (en el tope de una colina no hay más pendiente). En particular esto implica que ahí las derivadas parciales van a ser nulas. Lo mismo sucede en los puntos más bajos de las hondonadas, que corresponden a los mínimos relativos. Desde ese punto de vista el siguiente resultado es natural.

Teorema 4.5. *Si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en $p \in \mathbb{R}^2$, entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0. \quad \square$$

Notar que la tesis del teorema anterior equivale a $\nabla f(p) = (0,0)$. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, los puntos $p \in \mathbb{R}^2$ tales que $\nabla f(p) = (0,0)$ se llaman los *puntos estacionarios* de f. El teorema anterior nos dice que si f tiene un extremo relativo en p, entonces p es un punto estacionario. El recíproco en general no es cierto, porque pueden haber puntos estacionarios que no sean extremos relativos; los puntos estacionarios de ese tipo se llaman *puntos de silla.*

Ejemplo 4.6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$. Sus derivadas parciales son $f_x(x,y) = 2x$ y $f_y(x,y) = -2y$. Luego el único punto estacionario es $(0,0)$. Notar que valen $f(x,0) = x^2 > 0$ y $f(0,y) = -y^2 < 0$, para todo x, y no nulos. Como los puntos de la forma $(x,0)$ y $(0,y)$ se pueden acercar a $(0,0)$ tanto como queramos, entonces vemos que cerca de $(0,0)$ siempre hay puntos en los cuales f es positiva y puntos en los que es negativa. Luego $0 = f(0,0)$ no puede ser ni un máximo ni un mínimo, y como es un punto estacionario, deducimos que $(0,0)$ es un punto de silla.

Ejemplo 4.7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = -x^3 + 7x^2 + y^2 + 2xy$. Para hallar sus puntos estacionarios, primero tenemos que hallar sus derivadas parciales:

$$f_x(x,y) = -3x^2 + 14x + 2y, \qquad f_y(x,y) = 2y + 2x.$$

Luego hay que resolver el sistema de ecuaciones formado por $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{r} -3x^2 + 14x + 2y = 0 \\ 2y + 2x = 0 \end{array} \right.$$

La segunda ecuación equivale a $y = -x$. Sustituyendo $y = -x$ en la primera ecuación obtenemos

$$-3x^2 + 14x - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ o } x = 4.$$

Sustituyendo estos valores en $y = -x$ obtenemos que los puntos estacionarios son $(0,0)$ y $(4,-4)$. Los puntos anteriores son los candidatos a extremos relativos, pero también podrían ser puntos de silla. Para poder determinarlo introducimos los siguientes conceptos.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que existen sus derivadas parciales y están definidas en todo $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2y^3 + 5x$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 + 5$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2$. Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y por lo tanto podemos considerar las derivadas parciales de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$; esas son las *derivadas segundas* de f y se definen mediante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Nosotros en general usaremos la notación más compacta $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Por ejemplo, en el caso de $f(x,y) = x^2y^3 + 5x$, es

$$f_x = 2xy^3 + 5 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{xx} = 2y^3 \\ f_{yx} = 6xy^2 \end{array} \right. ; \quad f_y = 3x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f_{xy} = 6xy^2 \\ f_{yy} = 6x^2y \end{array} \right. .$$

Notar que estamos escribiendo f_x en vez de $f_x(x,y)$ y lo mismo con las otras derivadas.

Nota 4.8. En lo que sigue vamos a asumir siempre que las funciones tienen derivadas parciales segundas y que estas son funciones continuas. Esto es lo que suele ocurrir, así que no nos va a afectar en nuestras aplicaciones.

Observación 4.9. En el ejemplo anterior obtuvimos $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 6xy^2$. Esto vale en general y es lo que afirma el siguiente teorema.

Teorema 4.10. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función, entonces las* derivadas cruzadas *f_{xy} y f_{yx} coinciden.* □

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Dado $p \in \mathbb{R}^2$, la *matriz hessiana* de f en p es la matriz $Hf(p)$ definida por

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}.$$

Notar que el teorema anterior implica que $Hf(p)$ es una matriz simétrica. Al determinante de $Hf(p)$ se le llama el *hessiano* de f en p:

$$\det Hf(p) = \begin{vmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{vmatrix} = f_{xx}(p)f_{yy}(p) - f_{xy}(p)^2. \tag{2}$$

Ahora estamos en condiciones de dar un criterio para clasificar los puntos estacionarios.

Teorema 4.11. *Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y p un punto estacionario de f. Consideremos*

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana de f en p.

1. *Si $\det H > 0$ y $f_{xx}(p) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en p.*
2. *Si $\det H > 0$ y $f_{xx}(p) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en p.*
3. *Si $\det H < 0$, entonces f tiene un punto de silla en p.* □

Observaciones 4.12.
1. Una forma de recordar este criterio es observando que es una generalización del criterio para funciones de una variable, que dice que si $f'(p) = 0$, entonces $f''(p) > 0$ implica que f tiene un mínimo relativo en p y $f''(p) < 0$ implica que f tiene un máximo relativo en p.
2. Si $\det H = 0$, entonces el criterio no nos dice nada. En este caso hay que buscar otra forma de clasificar el punto estacionario.
3. La fórmula (2) implica que no puede suceder $\det H > 0$ y $f_{xx}(p) = 0$. Luego los casos anteriores cubren todas las posibilidades.

Ejemplo 4.13. En el ejemplo 4.7 vimos que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función $f(x, y) = -x^3 + 7x^2 + y^2 + 2xy$, entonces sus derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 14x + 2y, \quad f_y(x, y) = 2y + 2x$$

y sus puntos estacionarios son $(0, 0)$ y $(4, -4)$. La matriz hessiana de f en un punto genérico $p = (x, y)$ es

$$Hf(p) = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x + 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Considerando $p = (0,0)$ es

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det Hf(0,0) = 24 > 0 \text{ y } f_{xx}(0,0) = 14 > 0,$$

luego f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$. Consideremos ahora $p = (4,-4)$.

$$Hf(4,-4) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det Hf(0,0) = -24 < 0,$$

luego f tiene un punto de silla en $(4,-4)$.

Ejemplo 4.14. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x+y)^2$. Entonces

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 2(x+y).$$

Luego los puntos estacionarios de f son los de la forma $(a,-a)$, con $a \in \mathbb{R}$ (los puntos de la recta $y = -x$). Calculando las derivadas segundas obtenemos $f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yy}(x,y) = 2$. Luego

$$Hf = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det Hf = 0.$$

En este caso el hessiano se anula en todos los puntos del plano, por que cual el criterio no nos permite clasificar los puntos estacionarios. Sin embargo es claro que vale

$$f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0 = f(a,-a), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Luego 0 es un mínimo absoluto de f y lo alcanza en los puntos de la forma $(a,-a)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^4$. Entonces

$$f_x = 2x, \quad f_y = 4y^3 \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 12y^2.$$

Luego $(0,0)$ es el único punto estacionario y

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det Hf(0,0) = 0.$$

Como el hessiano de f se anula en $(0,0)$ entonces el criterio no lo clasifica. En este caso vale $f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$.

Ejemplo 4.16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^3$. Entonces

$$f_x = 2x, \quad f_y = 3y^2 \quad \Rightarrow \quad f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6y.$$

Luego $(0,0)$ es el único punto estacionario y

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det Hf(0,0) = 0.$$

Como el hessiano de f se anula en $(0,0)$ entonces el criterio no lo clasifica. Observar que es $f(0,y) = y^3$. Graficando la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = y^3$ se ve que a la derecha de 0 toma valores positivos y a la izquierda negativos, Esto implica que f tiene un punto de silla en $(0,0)$.

Observación 4.17. Notar que los dos ejemplos anteriores tienen la misma matriz hessiana en $(0,0)$, pero en un caso es un punto de silla y en el otro es un mínimo.

4.3. Extremos absolutos en regiones acotadas

Hay casos en que tenemos una función definida en una región amplia (por ejemplo en todo el plano), pero nos interesa hallar sus extremos absolutos en un dominio más reducido, por ejemplo en un rectángulo o en un disco. El siguiente resultado da una condición suficiente para que existan dichos extremos.

Teorema 4.18 (Weierstrass). *Si D es un conjunto cerrado y acotado y $f : D \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto.* □

El teorema anterior hace referencia a que el dominio D tiene que ser cerrado y acotado. Que sea *cerrado* es que contenga a su borde, por ejemplo el disco $\{(x, y) : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$ es cerrado, pero $\{(x, y) : \; x^2 + y^2 < 1\}$ no lo es. Que sea *acotado* es que no te puedes alejar infinitamente moviéndote dentro del conjunto. Por ejemplo, los dos conjuntos anteriores son acotados, pero el semiplano $\{(x, y) : \; x \geq 0\}$ no lo es. Luego de los anteriores, el conjunto $\{(x, y) : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$ es el único que es cerrado y acotado.

En los ejemplos siguientes las funciones van a ser continuas y los dominios cerrados y acotados, así que estas funciones van a tener extremos absolutos (por el teorema de Weierstrass); el problema es hallarlos.

Ejemplo 4.19. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^3$, queremos hallar los extremos absolutos de f restringida al conjunto $D = \{(x, y) : \; -1 \leq x \leq 2, \; -2 \leq y \leq 3\}$. Lo primero que hay que hacer es dibujar el conjunto D. En este caso D es un rectángulo limitado por las rectas $y = -2$, $y = 3$, $x = -1$ y $x = 2$. Los extremos absolutos pueden estar en el interior[3] de D, y en ese caso van a ser extremos relativos y por lo tanto puntos estacionarios, o pueden estar en el borde de D. Vamos a hallar todos esos puntos.

Primero consideramos el interior de D. Las derivadas parciales de f son $f_x = 2x$ y $f_y = 3y^2$. Luego el único punto estacionario es $(0, 0)$, que está en el interior de D.

Ahora consideramos los puntos del borde de D. Ese borde está formado por cuatro segmentos de recta. Lo dividimos en dos grupos, los extremos de estos segmentos (que son los vértices del rectángulo D) y los puntos interiores a estos segmentos. Los vértices son $(-1, -2)$, $(-1, 3)$, $(2, -2)$ y $(2, 3)$. A continuación estudiamos los interiores de los segmentos que forman el borde de D.

1. El segmento determinado por $y = -2$ y $-1 < x < 2$. Si restringimos f a estos puntos obtenemos una función de una variable $\alpha : (-1, 2) \to \mathbb{R}$ definida por $\alpha(x) = f(x, -2) = x^2 - 8$. Si hay un extremo absoluto en un punto de este segmento, entonces va a ser un extremo relativo de α y por lo tanto la derivada α' se anula en ese punto. Luego tenemos que buscar los puntos del intervalo abierto $(-1, 2)$ en los cuales se anula α'. En este caso es $\alpha'(x) = 2x$, que se anula en $x = 0$. Como $0 \in (-1, 2)$ entonces agregamos ese punto, que al estar sobre la recta $y = -2$, corresponde al punto $(0, -2)$. En los segmentos restantes razonamos de la misma forma obteniendo los resultados siguientes.

2. Segmento determinado por $y = 3$ y $-1 < x < 2$. Consideramos $\beta : (-1, 2) \to \mathbb{R}$ definida por $\beta(x) = f(x, 3) = x^2 + 27$. Es $\beta'(x) = 2x$. Lo cual nos da el punto $(0, 3)$.

3. Segmento determinado por $x = -1$ y $-2 < y < 3$. Consideramos $\gamma : (-2, 3) \to \mathbb{R}$ definida por $\gamma(y) = f(-1, y) = 1 + y^3$. Es $\gamma'(y) = 3y^2$. Lo cual nos da el punto $(-1, 0)$.

4. Segmento determinado por $x = 2$ y $-2 < y < 3$. Consideramos $\delta : (-2, 3) \to \mathbb{R}$ definida por $\delta(y) = f(2, y) = 4 + y^3$. Es $\delta'(y) = 3y^2$. Lo cual nos da el punto $(2, 0)$.

[3] Los puntos de D que no están en su borde se llaman *puntos interiores*. Al conjunto de todos esos puntos interiores se le llama el *interior* de D.

Sabemos que los extremos absolutos se van a alcanzar en algunos de los puntos anteriores, que son

$$\text{interior: } (0,0); \quad \text{vértices: } (-1,-2),\ (-1,3),\ (2,-2),\ (2,3); \quad \text{lados: } (0,-2),\ (0,3),\ (-1,0),\ (2,0).$$

Ahora solo nos resta evaluar f en estos puntos y fijarnos en cuál o cuáles toma su valor máximo y su mínimo.

$$f(0,0) = 0; \quad f(-1,-2) = -7, \quad f(-1,3) = 28, \quad f(2,-2) = -4, \quad f(2,3) = 31;$$
$$f(0,-2) = -8, \quad f(0,3) = 27, \quad f(-1,0) = 1, \quad f(2,0) = 4.$$

Luego el máximo de f en D es 31 y lo alcanza en $(2,3)$ y el mínimo es -8 y lo alcanza en $(0,-2)$.

Ejemplo 4.20. Buscamos hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, en la región D limitada por las rectas $x = 0$, $x = 2$, $y = -x$ y $y = 2$. En este caso la figura es un trapecio, y razonado como antes sabemos que los extremos absolutos van a estar en los vértices de D, en el borde de D o en los puntos estacionarios que estén en el interior de D. Los vértices de D son $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,-2)$ y $(2,2)$. Ahora hallamos los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ y } (1,1).$$

Notar que $(0,0)$ y $(1,1)$ están en D (esto siempre hay que verificarlo, porque a veces no sucede y hay que descartar puntos). Ahora nos queda por hallar los puntos que están en los lados. Razonamos igual que en el ejemplo anterior.

1. Segmento determinado por $y = 2$ y $0 < x < 2$. Consideramos $\alpha(x) = f(x,2) = x^3 - 6x + 8$. Su derivada es $\alpha'(x) = 3x^2 - 6$, que tiene raíces $\pm\sqrt{2}$. Notar que $x = -\sqrt{2}$ no verifica $0 < x < 2$, luego el único punto que obtenemos es $\left(\sqrt{2}, 2\right)$.

2. Segmento determinado por $y = -x$ y $0 < x < 2$. Consideramos $\beta(x) = f(x,-x) = 3x^2$. Su derivada es $\beta'(x) = 6x$, que tiene raíz 0. Luego obtenemos $(0,0)$.

3. Segmento determinado por $x = 0$ y $0 < y < 2$. Consideramos $\gamma(y) = f(0,y) = y^3$. Esto nos da el punto $(0,0)$.

4. Segmento determinado por $x = 2$ y $0 < y < 2$. Consideramos $\delta(y) = f(2,y) = y^3 - 6y + 8$. Su derivada es $\delta'(y) = 3y^2 - 6$, que tiene raíces $\pm\sqrt{2}$. Esto nos da los puntos $\left(2, \sqrt{2}\right)$ y $\left(2, -\sqrt{2}\right)$.

Luego los candidatos son

$$(0,0), \quad (0,2), \quad (2,-2), \quad (2,2), \quad (1,1), \quad \left(\sqrt{2}, 2\right), \quad \left(2, \sqrt{2}\right), \quad \left(2, -\sqrt{2}\right).$$

Evaluando f en esos puntos obtenemos que el mínimo es $-1 = f(1,1)$ y el máximo es $8 + 4\sqrt{2} = f\left(2, -\sqrt{2}\right)$.

4.4. Generalización a más de dos variables

Todo lo que vimos para funciones de dos variables se generaliza naturalmente para funciones de tres o más variables. Por ejemplo la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = \operatorname{sen}\left(x^2 + y^3\right) + x^2yz^4$ es una función de tres variables. En este caso podemos calcular las derivadas parciales respecto a las tres variables x, y, z, obteniendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x\cos\left(x^2 + y^3\right) + 2xyz^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3y^2\cos\left(x^2 + y^3\right) + x^2z^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 4x^2yz^3.$$

Con las derivadas parciales construimos el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x\cos\left(x^2 + y^3\right) + 2xyz^4,\ 3y^2\cos\left(x^2 + y^3\right) + x^2z^4,\ 4x^2yz^3\right).$$

Los extremos relativos de f van a estar en los puntos estacionarios de f, que es donde se anula su gradiente, etc. Lo único que no vale es el teorema 4.11, dado que esa formulación solo es válida para dos variables.

5. Mínimos cuadrados

En muchas situaciones se tiene una teoría que explica un fenómeno, pero los datos obtenidos experimentalmente no suelen coincidir exactamente con el modelo teórico. Por ejemplo, se sabe que la temperatura de la tierra se incrementa linealmente a medida que aumenta la profundidad, es decir, es una función del tipo $t = ax + b$, en que x es la profundidad y t es la temperatura. El problema es que los valores de a y b no son constantes en todo el planeta, dado que dependen del tipo de suelo, etc. Para conocer los valores de a y b en un lugar y a una profundidad determinados, se hace un pozo y se van tomando mediciones de la temperatura, con eso se obtiene una serie de puntos $(x_1, t_1), \ldots, (x_n, t_n)$; luego se busca una recta que se aproxime lo mejor posible a esos puntos. Una forma de obtener esta recta es el método de *mínimos cuadrados*, que describiremos a continuación.

5.1. Recta óptima

Partimos de una cantidad finita $p_1, p_2, \cdots, p_n$ de puntos del plano (podrían ser los resultados de un experimento) y queremos encontrar la recta que mejor se aproxima a esos puntos. Supongamos que los puntos son $p_i = (x_i, y_i)$, con $x_i \neq x_j$, si $i \neq j$, y que la recta que queremos hallar tiene ecuación $y = ax + b$. Para hallar los coeficientes a y b, usamos la función $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

Notar que las variables son a y b, mientras que $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ son constantes. Observar que es $E(a, b) \geq 0$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y que si a_0 y b_0 son tales que la recta $y = a_0 x + b_0$ pasa por $p_1, p_2, \cdots, p_n$, entonces $E(a_0, b_0) = 0$. El valor $E(a, b)$ es una medida del error obtenido al aproximar los puntos $p_1, p_2, \cdots, p_n$ con la recta $y = ax + b$. Lo que buscamos es minimizar ese error, es decir, hallar el mínimo de esta función. Para eso usaremos las técnicas de la sección anterior.

Empezamos hallando las derivadas parciales de $E(a, b)$

$$E_a(a, b) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) x_i, \qquad E_b(a, b) = 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i).$$

Para encontrar el mínimo de la función E tenemos que hallar los puntos donde se anula su gradiente, es decir, resolver el siguiente sistema de ecuaciones en a y b

$$\begin{array}{r} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{array}.$$

Operando y reordenando los términos obtenemos

$$\begin{array}{rl} (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) a + (\sum_{i=1}^{n} x_i) b & = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i) a + nb & = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{array}. \tag{3}$$

Las coordenadas (a_0, b_0) del mínimo de E se obtienen resolviendo el sistema (3) en las variables a y b. Para los valores obtenidos, la recta que mejor aproxima a los datos es la de ecuación $y = a_0 x + b_0$.
El error[4] de aproximación se mide con la fórmula siguiente $\epsilon = \sqrt{\frac{1}{n} E(a_0, b_0)}$.

[4] En esta fórmula dividimos por n para promediar y tomamos la raíz cuadrada para que nos vuelva a quedar en las mismas unidades de medida.

Ejemplo 5.1. Encontrar la recta que mejor aproxime la siguiente tabla de datos.

x	y
7	2
10	2
5	5
4	7
3	11
13	2
2	14

Tenemos $n = 7$ puntos. Para hallar los coeficientes del sistema (3) nos ayudamos con la tabla siguiente

x	y	x^2	xy
7	2	49	14
10	2	100	20
5	5	25	25
4	7	16	28
3	11	9	33
13	2	169	26
2	14	4	28

Luego solo resta sumar la columnas

$$\sum x = 44, \quad \sum y = 43, \quad \sum x^2 = 372, \quad \sum xy = 174.$$

Notar que estamos usando una notación simplificada escribiendo $\sum x$ en vez de $\sum_{i=1}^{7} x_i$, etc. Los números que conseguimos los sustituimos en (3), obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 372a + 44b & = 174 \\ 44a + 7b & = 43 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$a_0 = -\frac{337}{334} = -1,01, \quad b_0 = \frac{2085}{167} = 12,49.$$

Luego la recta que mejor aproxima a los datos es la de ecuación

$$y = -1,01\,x + 12,94.$$

El error de aproximación es

$$\epsilon = \sqrt{\frac{1}{7}E(-1,01,\ 12,49)} = \sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(-1,01\,x_i + 12,49 - y_i)^2} = 2,48.$$

Observación 5.2. Los cálculos anteriores son engorrosos, pero hay programas que los hacen automáticamente, por ejemplo el *Excel* o el *LibreOffice Calc*. Eso es lo que van a usar en cursos posteriores.

5.2. Parábola óptima

Hay casos en que el modelo que describe un fenómeno es por medio de una fórmula que no es la de una recta, si no la de una parábola. Por ejemplo, la fórmula que decribe la distancia en función del tiempo en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es $x = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$. En este caso podemos tener mediciones de distancias $x_1, x_2, \ldots$ en instantes de tiempo $t_1, t_2, \ldots$ y queremos determinar los coeficientes a, v_0, x_0 de la fórmula $x = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$, para que esta aproxime lo mejor posible los datos obtenidos.

Supongamos que tenemos puntos $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ (con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$) y buscamos la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que mejor se adapte a esos datos. En este caso la función que tenemos que minimizar será

$$E(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2 .$$

Notar que ahora E es una función de tres variables, a, b, c, que son los coeficientes de la parábola. Razonando como en el caso de la recta, lo primero que hacemos es hallar las derivadas parciales

$$E_a = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) x_i^2, \quad E_b = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) x_i, \quad E_c = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right).$$

En lo anterior estamos abreviando E_a en vez de $E_a(a,b,c)$, etc. El mínimo de E va a estar donde se anule su gradiente, es decir donde se anulen las tres derivadas parciales. Igualando a cero E_a, E_b y E_c y operando obtenemos que para hallar ese mínimo tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones en a, b, c

$$\left\{ \begin{array}{rl} (\sum_{i=1}^n x_i^4)a + (\sum_{i=1}^n x_i^3)b + (\sum_{i=1}^n x_i^2)c & = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i^3)a + (\sum_{i=1}^n x_i^2)b + (\sum_{i=1}^n x_i)c & = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i^2)a + (\sum_{i=1}^n x_i)b + nc & = \sum_{i=1}^n y_i \end{array} \right. \tag{4}$$

Resolviendo el sistema se obtienen a_0, b_0, c_0 que son los coeficientes de $y = a_0x^2 + b_0x + c_0$, que es la parábola que mejor aproxima los datos.

Por ejemplo, si tomamos los datos del ejemplo 5.1, entonces el sistema (4) queda

$$\left\{ \begin{array}{rl} 41940a + 3764b + 372c & = 1028 \\ 3764a + 372b + 44c & = 174 \\ 372a + 44b + 7c & = 43 \end{array} \right.$$

cuya solución es $a_0 = 0,21$, $b_0 = -4,12$ y $c_0 = 20,98$. Luego la parábola buscada es la de ecuación

$$y = 0,21x^2 - 4,12x + 20,98.$$

6. Integrales múltiples

Recordar que dada una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si es $f \geq 0$, entonces la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mide el área encerrada bajo el gráfico de f. Una forma de calcular dicha integral, es elegir una partición arbitraria $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, luego en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomar $f(\bar{x}_i)$ el máximo de f restringido al $[x_{i-1}, x_i]$, y construir la suma parcial $\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)\Delta x_i$, siendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ la longitud del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Esta suma parcial es una aproximación por exceso al área bajo el gráfico. La integral de f es el valor límite de estas sumas cuando Δx_i tiende a cero

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i.$$

En la sección que sigue vamos a generalizar esa construcción a funciones de dos variables, aunque lo mismo vale para funciones de tres o más variables. Como no vamos a entrar en detalles técnicos, vamos a asumir siempre que las funciones son "buenas", en el sentido de que nos permiten realizar las operaciones que necesitemos. Eso es lo que suele ocurrir en la práctica.

6.1. Integrales dobles

Sea $A = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$ un rectángulo en el plano $\mathbb{R}^2$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

dos particiones de $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente. Estas particiones dividen el rectángulo A en $n \times m$ rectángulos $A_{ij} = [x_i, x_{i-1}] \times [y_j, y_{j-1}]$. Sean $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Sea (x_{ij}, y_{ij}) un punto en el cual f alcanza su máximo sobre el rectángulo A_{ij}. Entonces definimos la *integral (doble)* de f en A mediante

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy := \lim_{\Delta x_i, \Delta y_j \to 0} \sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$

Notar que si es $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in A$, entonces $\sum_{i,j} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ es una aproximación por exceso al volumen bajo el gráfico de f. Por lo tanto el límite $\iint_A f(x, y)\, dxdy$ representa el volumen bajo el gráfico de f .

Ejemplo 6.1. Sea $A = [a, b] \times [c, d]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función constante $f(x, y) = k$. Suponiendo que es $k > 0$, entonces $\iint_A k\, dx\, dy$ representa el volumen de una caja cuya base es el rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ y su altura es k. Luego $\iint_A k\, dx\, dy = k(b - a)(d - c)$. Para el caso $k \leq 0$ se obtiene el mismo resultado.

Calcular integrales mediante la definición en general es difícil, pero el siguiente resultado lo simplifica.

Teorema 6.2 (Fubini)**.** *Sea $A = [a, b] \times [c, d]$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces*

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy. \quad \square$$

Ejemplo 6.3. Veremos cómo calcular $\iint_A f(x, y)\, dxdy$, siendo $A = [0, 1] \times [1, 2]$ y $f(x, y) = x^2 y$. Aplicando el teorema de Fubini, obtenemos

$$\iint_A x^2 y\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_1^2 x^2 y\, dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2 y\, dx \right) dy.$$

En este caso podemos elegir cualquiera de las dos opciones. Tomamos la primera.

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y\, dx\, dy &= \int_0^1 \left(\int_1^2 x^2 y\, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left(\int_1^2 y\, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=1}^{y=2} \right) dx = \int_0^1 x^2 \frac{3}{2}\, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^2\, dx = \frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} \Bigg|_{x=0}^{x=1} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hasta ahora hemos considerado funciones definidas en rectángulos. Vamos a generalizar esa situación.

Sea $[a,b]$ un intervalo y $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que $g_1(x) \leq g_2(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Consideremos el conjunto $D = \{(x,y) : \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \ x \in [a,b]\}$. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Queremos definir $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$. Para eso elegimos $c, d \in \mathbb{R}$ tales que que $c \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq d$, para todo $x \in [a,b]$. Sea $A = [a,b] \times [c,d]$. Notar que es $D \subset A$. Consideramos $\tilde{f} : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{si } (x,y) \in D \\ 0, & \text{si } (x,y) \in A \text{ y } (x,y) \notin D \end{cases}.$$

Entonces definimos la integral de f en D mediante

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \iint_A \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy.$$

Observar que si aplicamos el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint_A \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy + \int_{g_2(x)}^{d} \tilde{f}(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} 0\,dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy + \int_{g_2(x)}^{d} 0\,dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.
\end{aligned}$$

Luego hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 6.4. *Sean $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que $g_1(x) \leq g_2(x)$, para todo $x \in [a,b]$. Consideremos el conjunto $D = \{(x,y) : \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \ x \in [a,b]\}$. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Entonces*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \quad \square$$

Ejemplo 6.5. Calcular $\iint_D x + y\,dxdy$, siendo $D = \{(x,y) : \ x^2 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x \leq 1\}$. Aplicando el teorema anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_D x + y\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x + y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=1} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} + x - x^3 - \frac{x^4}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \Big|_0^1 = \frac{13}{20}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.6. Calcular $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, siendo $D = \{(x,y) : \ |x| + |y| \leq 1\}$. Los puntos del borde de D verifican $|x| + |y| = 1$. Como es $|x| = \pm x$ dependiendo del signo de x, esto da lugar a cuatro rectas

$$x + y = 1, \quad x - y = 1, \quad -x + y = 1, \quad -x - y = 1.$$

Luego D es un cuadrado, cuyos vértices son $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$. En este caso para poder calcular $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$ necesitamos dividirla en dos integrales

$$\begin{aligned}\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\,dy\right)dx + \int_0^1\left(\int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\,dy\right)dx\\ &= \int_{-1}^{0}\left(e^{x+y}\Big|_{y=-x-1}^{y=x+1}\right)dx + \int_0^1\left(e^{x+y}\Big|_{y=x-1}^{y=-x+1}\right)dx\\ &= \int_{-1}^{0} e^{2x+1} - e^{-1}\,dx + \int_0^1 e - e^{2x-1}\,dx.\end{aligned}$$

Lo que resta es calcular dos integrales comunes y queda como ejercicio.

Como es de esperar existe una versión de lo anterior con los roles de x e y intercambiados. Lo resumimos en el siguiente resultado.

Teorema 6.7. *Sean $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funciones tales que $h_1(y) \le h_2(y)$, para todo $y \in [c,d]$. Consideremos el conjunto $D = \{(x,y) :\ h_1(y) \le x \le h_2(y),\ y \in [c,d]\}$. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función. Entonces*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy. \quad \square$$

Ejemplo 6.8. Calcular $\iint_D x+y\,dxdy$, siendo D el triángulo de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Las rectas que delimitan D son $x+y=1$, $-x+y=1$ y $y=0$. Luego

$$\begin{aligned}\iint_D x+y\,dx\,dy &= \int_0^1\left(\int_{y+1}^{-y+1} x+y\,dx\right)dy = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+xy\Bigg|_{x=y+1}^{x=-y+1}\right)dy\\ &= \int_0^1 \frac{(-y+1)^2}{2} + (-y+1)y - \left(\frac{(y+1)^2}{2} + (y+1)y\right)dy\\ &= \int_0^1 -2y-2y^2\,dy = -\left(y^2+\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Notar que si hubiésemos integrado al revés, es decir primero respecto a x y luego respecto a y, entonces tendríamos que haber calculado dos integrales dobles.

Cálculo de áreas. Si D es una región del plano, entonces su área se puede calcular mediante

$$\text{área}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$

Por ejemplo, si D está definida como en el teorema 6.4, entonces

$$\text{área}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\,dy\right)dx = \int_a^b g_2(x) - g_1(x)\,dx.$$

Esta es una fórmula conocida para integrales comunes. Más adelante veremos que la fórmula de cambio de variables permite a veces simplificar este cálculo.

Observación 6.9. La fórmula del teorema 6.4 se suele escribir

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

En ese caso el lado derecho de la fórmula representa $\int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$. Esto es solo una abreviación que evita introducir el paréntesis. Lo mismo sucede con la fórmula del teorema 6.7.

6.2. Cambio de variables

Análogamente a lo que sucede en las integrales comunes, existe una fórmula de sustitución o cambio de variables para integrales dobles, que dice lo siguiente

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv. \tag{5}$$

En la fórmula (5) estamos escribiendo x e y como funciones de u y v, de la forma $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$. Además $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ es el valor absoluto del *jacobiano* del cambio de variables, definido por

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u.$$

El conjunto E es el correspondiente a D en el cambio de variables $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$. Esto así como está es bastante incomprensible, pero se va a aclarar en los ejemplos siguientes.

6.2.1. Cambio lineal de variables

Ejemplo 6.10. Vamos a calcular el área de la región D comprendida por las rectas

$$x + 2y = 2, \quad x + 2y = 4, \quad y = x + 1, \quad y = x.$$

Si hacemos el cambio de variables $u = x - y$ y $v = x + 2y$, entonces esas rectas se transforman en

$$u = -1, \quad u = 0, \quad v = 2, \quad v = 4. \tag{6}$$

Para aplicar la fórmula (5) necesitamos escribir x e y en función de u y v, luego tenemos que resolver el siguiente sistema en las variables x e y

$$\begin{cases} x - y = u \\ x + 2y = v \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{2u+v}{3} \\ y = \frac{v-u}{3} \end{array}.$$

Entonces haciendo el cambio de variables $x = \frac{2u+v}{3}$ e $y = \frac{v-u}{3}$, la región D se transforma en la región E limitada por las rectas de (6). Calculando el jacobiano del cambio de variables obtenemos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Luego aplicando la fórmula (5) obtenemos

$$\text{área}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_E \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \iint_E \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{1}{3}\iint_E du\,dv.$$

La integral $\iint_E du\,dv$ mide el área del rectángulo E, que es $2 \times 1 = 2$. Luego el área de D es $\frac{2}{3}$.

El cambio de variables de ejemplo anterior es un cambio *lineal* de variables. Estos son los cambios de variable de la forma $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$, en que a, b, c, d son constantes tales que $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc \neq 0$. En este caso el jacobiano es

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Luego el jacobiano es constante y la fórmula de cambio de variables queda en

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = |ad - bc| \iint_E f(au + bv,\, cu + dv)\,du\,dv. \tag{7}$$

Ejemplo 6.11. Queremos calcular $\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy$, siendo D el triángulo delimitado por la recta $x+y=2$ y los ejes coordenados. Realizamos el cambio de variables $u=x-y$ y $v=x+y$. Despejando x e y en función de u y v obtenemos $x=\frac{1}{2}(-u+v)$ e $y=\frac{1}{2}(u+v)$. El jacobiano del cambio de variables es $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}$. Con este cambio de variables, a la región D limitada por las rectas $x+y=2$, $x=0$ e $y=0$, le corresponde la región E limitada por las rectas $v=2$, $\frac{1}{2}(-u+v)=0$ y $\frac{1}{2}(u+v)=0$, es decir, la región E limitada por las rectas $v=2$, $u=v$ y $u=-v$. Luego aplicando la fórmula (7) obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dx\,dy &= \left|-\frac{1}{2}\right|\iint_E e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,du\right) = \frac{1}{2}\int_0^2\left(ve^{\frac{u}{v}}\Big|_{u=-v}^{u=v}\right)dv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 v\left(e-e^{-1}\right)\,dv = \frac{e-e^{-1}}{2}\int_0^2 v\,dv = e-e^{-1}.\end{aligned}$$

6.2.2. Cambio a coordenadas polares

El otro cambio de variables que vamos a ver es el cambio a *coordenadas polares*. Dado un punto p en el plano, lo podemos ubicar por sus coordendas cartesianas x e y o por sus coordendas polares ρ y θ, en que ρ es la distancia de p al origen de coordenadas o y θ es el ángulo que forma la semirrecta de $\overrightarrow{op}$ con el eje horizontal. Notar que siempre es $\rho\geq 0$ y $0\leq\theta\leq 2\pi$. El cambio de un sistema de coordenadas al otro está dado por las fórmulas siguientes

$$x=\rho\cos(\theta),\ y=\rho\,\mathrm{sen}(\theta) \quad\Leftrightarrow\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\arctan(y/x).$$

El jacobiano es

$$\begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\cos(\theta) & -\rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta)\end{vmatrix} = \rho.$$

Luego la fórmula del cambio a polares queda

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E f\big(\rho\cos(\theta),\,\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\big)\rho\,d\rho\,d\theta. \tag{8}$$

siendo D el transformado de E mediante el cambio de variables. El cambio a coordenadas polares suele ser útil cuando el dominio de la función a integrar está limitado por circunferencias o arcos de circunferencias.

Ejemplo 6.12. Calcular el área de la región D limitada por arriba por la circunferencia $x^2+y^2=4$ y por debajo por el eje Ox. La región es $D=\big\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0\big\}$. Si hacemos el cambio a polares $x=\rho\cos(\theta)$ e $y=\rho\,\mathrm{sen}(\theta)$, entonces a D le corresponde el conjunto $E=\{(\rho,\theta):\ 0\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\pi\}$. Luego aplicando la fórmula (8) obtenemos

$$\text{área}(D)=\iint_D 1\,dx\,dy=\iint_E \rho\,d\rho\,d\theta=\int_0^\pi d\theta\int_0^2\rho\,d\rho=\int_0^\pi\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2\right)d\theta=\int_0^\pi 2\,d\theta=2\pi.$$

Ejemplo 6.13. Calcular el área de la región $D=\big\{(x,y):\ 1\leq x^2+y^2\leq 9,\ 0\leq y\leq -x\big\}$. El conjunto D se puede describir como $D=D_1\cap D_2$, siendo D_1 la región entre las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$, y D_2 es el semiplano de borde la recta $y=-x$, que pasa por el punto $(-1,0)$. Pasando a polares a D le corresponde el rectángulo $E=\{(\rho,\theta):\ 1\leq\rho\leq 3,\ \frac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\pi\}$. Luego

$$\text{área}(D)=\iint_D 1\,dx\,dy=\iint_E\rho\,d\rho\,d\theta=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}d\theta\int_1^3\rho\,d\rho=\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\times\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^3\right)=\pi.$$

Ejemplo 6.14. Calcular $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, siendo D el disco de radio 1 centrado en el origen O. Es $D = \big\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1\big\}$ y al pasar a polares le corresponde $E = \{(\rho,\theta):\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Notar que de $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$ se deduce

$$x^2+y^2 = \rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) = \rho^2\big(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta)\big) = \rho^2.$$

Luego $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$ y por lo tanto aplicando la fórmula (8) obtenemos

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_E \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho.$$

La integral $\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho$ se puede calcular mediante el cambio de variable $z = 1-\rho^2$, que implica $dz = -2\rho\,d\rho$ y por lo tanto $\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}dz$. Luego

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\pi\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = 2\pi\int_1^0 \sqrt{z}\left(-\frac{1}{2}dz\right) = \pi\int_0^1 \sqrt{z}\,dz = \frac{2\pi}{3}.$$

Ejemplo 6.15. Calcular $\iint_D x\,dx\,dy$, siendo $D = \big\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge -x\big\}$. Notar que D es la mitad de un disco apoyado en la recta $y = -x$. Pasando a polares al conjunto D le corresponde el rectángulo $E = \big\{(\rho,\theta):\ 0 \le \rho \le 1,\ -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}\big\}$. Luego

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dx\,dy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_0^1 \rho\cos(\theta)\,\rho\,d\rho\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\cos(\theta)\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right) d\theta = \left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(\theta)\,d\theta\right)\\ &= \left(\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^1\right)\left(\mathrm{sen}(\theta)\bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$