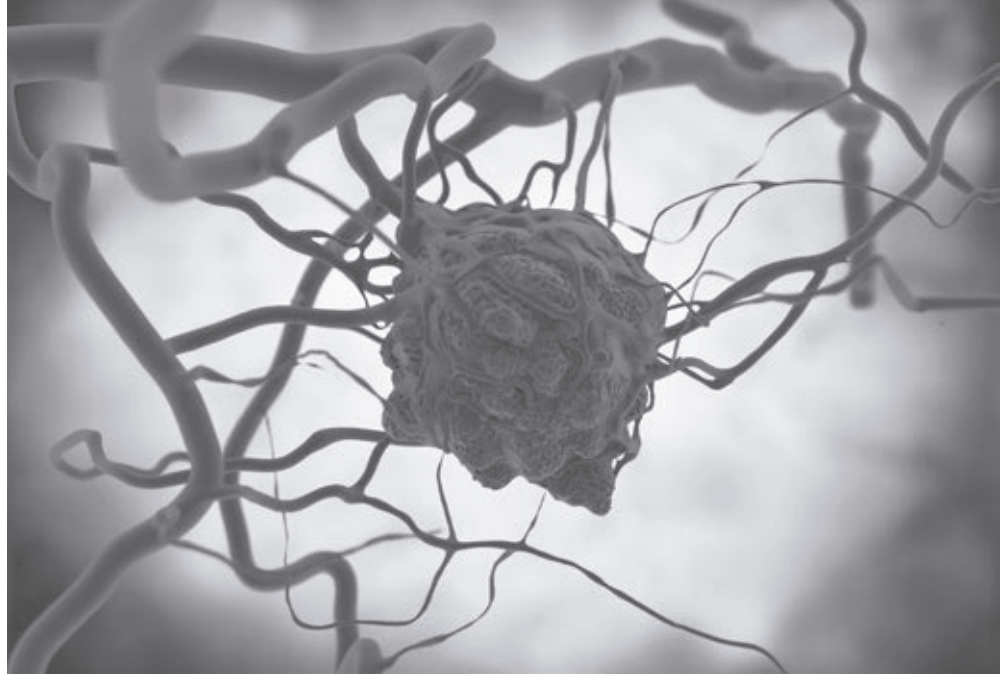


15

Integrales múltiples

Los tumores, como el que se muestra, han sido modelados como “esferas con protuberancias”. En el ejercicio 47 de la sección 15.8 se le pedirá calcular el volumen encerrado por una superficie de este tipo.



© Juan Gaertner/Shutterstock.com

EN ESTE CAPÍTULO SE PROLONGARÁ la idea de una integral definida a las integrales dobles y triples de funciones de dos o tres variables. Estas ideas se usarán después para calcular volúmenes, masas y centroides de regiones más generales que las que se pudieron considerar en los capítulos 6 y 8. También se usarán integrales dobles para calcular probabilidades cuando dos variables aleatorias están implicadas.

Se verá que las coordenadas polares son útiles para calcular integrales dobles en algunos tipos de regiones. En forma similar, se presentarán dos nuevos sistemas de coordenadas en el espacio tridimensional —las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas— que simplifican enormemente el cálculo de integrales triples en ciertas regiones sólidas de ocurrencia común.

15.1 Integrales dobles en rectángulos

Así como el intento de resolver el problema del área condujo a la definición de una integral definida, ahora se buscará determinar el volumen de un sólido y llegar en el proceso a la definición de una integral doble.

Repaso de la integral definida

Recuerde primero los elementos básicos concernientes a las integrales definidas de funciones de una variable. Si $f(x)$ se define para $a \leq x \leq b$, se comienza dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$ y se eligen puntos de muestra x_i^* en estos subintervalos. Luego se forma la suma de Riemann

$$\text{1} \quad \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

y se toma el límite de esas sumas como $n \rightarrow \infty$ para obtener la integral definida de f de a a b :

$$\text{2} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

En el caso especial en que $f(x) \geq 0$, la suma de Riemann puede interpretarse como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación de la figura 1, y $\int_a^b f(x) dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b .

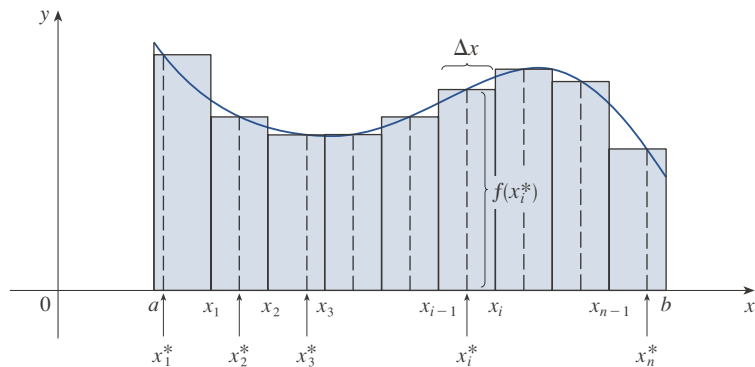


FIGURA 1

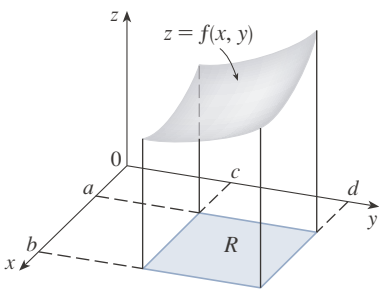


FIGURA 2

Volúmenes e integrales dobles

En forma similar, si se considera una función f de dos variables definida en un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

y se supone primero que $f(x, y) \geq 0$. La gráfica de f es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que se encuentra arriba de R y bajo la gráfica de f , es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

(Véase la figura 2.) La meta es determinar el volumen de S .

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos. Se hace esto dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho $\Delta x = (b - a)/m$ y dividiendo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual ancho $\Delta y = (d - c)/n$. Al dibujar líneas

paralelas a los ejes de coordenadas que pasan por los puntos extremos de esos subintervalos, se forman los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada uno con área $\Delta A = \Delta x \Delta y$, como en la figura 3.

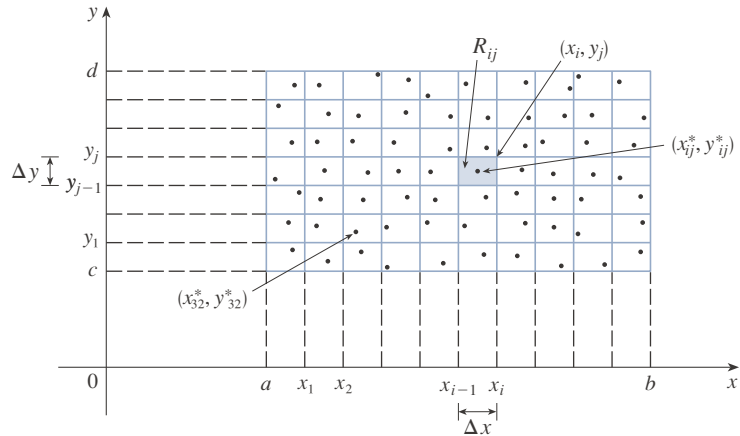


FIGURA 3
División de R en subrectángulos

Si se elige un **punto muestra** (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en cada R_{ij} , se puede aproximar la parte de S ubicada sobre cada R_{ij} mediante una fina caja rectangular (o “columna”) con base R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como se muestra en la figura 4. (Compare con la figura 1.) El volumen de esta caja es la altura de la caja multiplicada por el área del rectángulo base:

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Si se sigue este procedimiento para todos los rectángulos y se suman los volúmenes de las cajas correspondientes, se obtendrá una aproximación del volumen total de S :

3

$$V \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

(Véase la figura 5.) Esta doble suma significa que para cada subrectángulo se evalúa f en el punto elegido y se multiplica por el área del subrectángulo, y después se suman los resultados.

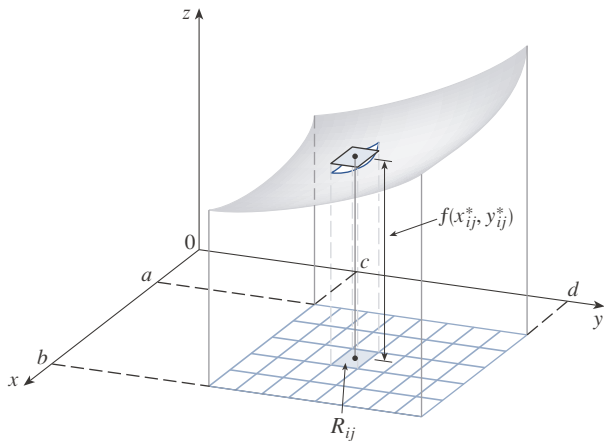


FIGURA 4

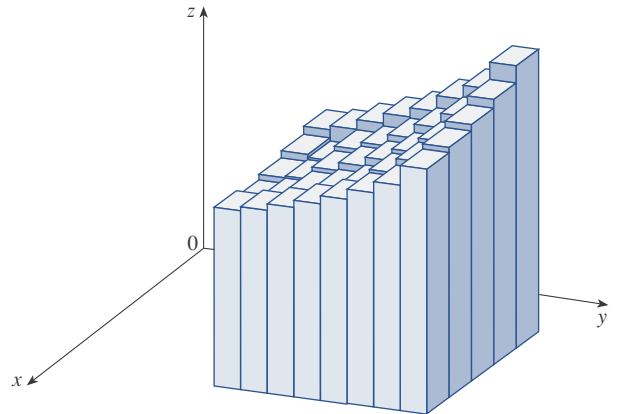


FIGURA 5

El significado del doble límite en la ecuación 4 es que se puede hacer la doble suma lo más cercana que se quiera al número V [para cualquier selección de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}] tomando m y n lo suficientemente grandes.

La intuición dice que la aproximación dada en (3) mejora cuando m y n se vuelven más grandes, de modo que sería de esperar que

$$\boxed{4} \quad V = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Se usa la expresión en la ecuación 4 para definir el **volumen** del sólido S que se encuentra bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo R . (Se puede demostrar que esta definición es congruente con la fórmula para el volumen en la sección 6.2.)

Límites del tipo que aparece en la ecuación 4 ocurren con frecuencia, no solo en la determinación de volúmenes, sino también en una amplia variedad de otras situaciones (como se verá en la sección 15.4) aun si f no es una función positiva. Así, se hace la definición siguiente.

Note la semejanza entre la definición 5 y la definición de una integral en la ecuación 2.

5 Definición La **integral doble** de f en el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

si este límite existe.

Aunque se ha definido la integral doble dividiendo R en subrectángulos de igual tamaño, se podría haber usado subrectángulos R_{ij} de tamaño desigual. Pero luego se tendría que cerciorar de que todas sus dimensiones se aproximarán a cero en el proceso límite.

El significado preciso del límite en la definición 5 es que para cada número $\varepsilon > 0$ existe un entero N , tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dA - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \right| < \varepsilon$$

para todos los enteros m y n mayores que N y para cualquier selección de puntos muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} .

Una función f se llama **integrable** si el límite de la definición 5 existe. En cursos de cálculo avanzado se demuestra que todas las funciones continuas son integrables. De hecho, la integral doble de f existe siempre y cuando f “no sea demasiado discontinua”. En particular, si f está acotada en R [es decir, si hay una constante M , tal que $|f(x, y)| \leq M$ para todas las (x, y) en R] y f es continua ahí, excepto en un número finito de curvas suaves, f es integrable en R .

El punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) puede ser elegido como cualquier punto en el subrectángulo R_{ij} , pero si se escoge en el extremo superior derecho de R_{ij} [es decir (x_i, y_j)], véase la figura 3], la expresión para la integral doble luce más simple:

$$\boxed{6} \quad \iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta A$$

Al comparar las expresiones dadas en la ecuación 4 y la definición 5, se ve que un volumen puede escribirse como una integral doble:

Si $f(x, y) \geq 0$, el volumen V del sólido que se encuentra arriba del rectángulo R y bajo la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

La suma de la definición 5,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

se llama **doble suma de Riemann** y se usa como una aproximación del valor de la integral doble. [Nótese lo parecida que es a la suma de Riemann en (1) para una función de una variable.] Si f resulta ser una función *positiva*, la doble suma de Riemann representa la suma de los volúmenes de las columnas, como en la figura 5, y es una aproximación del volumen bajo la gráfica de f .

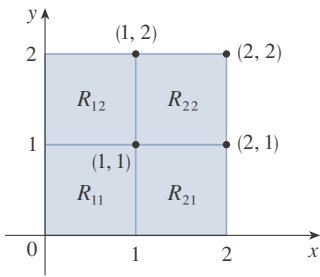


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que se encuentra arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y bajo el paraboloides elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R en cuatro cuadrados iguales y elija como punto muestra el extremo superior derecho de cada cuadrado R_{ij} . Trace el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.

SOLUCIÓN Los cuadrados se muestran en la figura 6. El paraboloides es la gráfica de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ y el área de cada cuadrado es $\Delta A = 1$. Al aproximar el volumen por la suma de Riemann con $m = n = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \Delta A \\ &= f(1, 1) \Delta A + f(1, 2) \Delta A + f(2, 1) \Delta A + f(2, 2) \Delta A \\ &= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34 \end{aligned}$$

Este es el volumen de las cajas rectangulares de aproximación que se muestran en la figura 7.

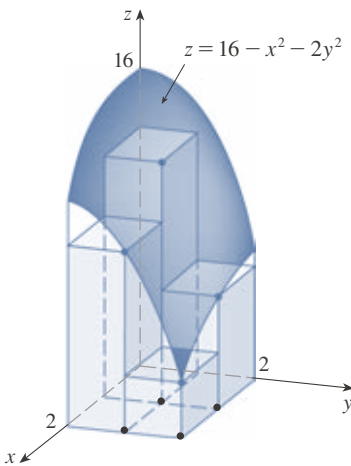


FIGURA 7

Se obtienen mejores aproximaciones del volumen del ejemplo 1 si se aumenta el número de cuadrados. La figura 8 muestra cómo las columnas comienzan a parecerse más al sólido real y las aproximaciones correspondientes se vuelven cada vez más acertadas cuando se usa 16, 64 y 256 cuadrados. En el ejemplo 7 se demostrará que el volumen exacto es 48.

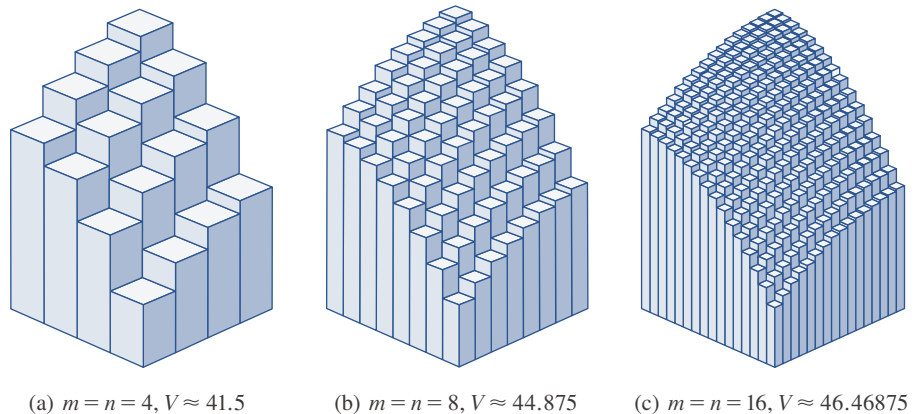


FIGURA 8

Las aproximaciones por la suma de Riemann del volumen bajo $z = 16 - x^2 - 2y^2$ se vuelven más acertadas conforme m y n aumentan.

EJEMPLO 2 Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$, evalúe la integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2} \, dA$$

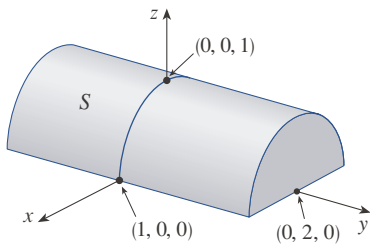


FIGURA 9

SOLUCIÓN Sería muy difícil evaluar directamente esta integral a partir de la definición 5 pero, debido a que $\sqrt{1-x^2} \geq 0$, se puede calcular la integral interpretándola como un volumen. Si $z = \sqrt{1-x^2}$, entonces $x^2 + z^2 = 1$ y $z \geq 0$, así que la doble integral dada representa el volumen del sólido S que se encuentra bajo el cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ y arriba del rectángulo R . (Véase la figura 9.) El volumen de S es el área de un semicírculo con radio 1 multiplicada por la longitud del cilindro. Así,

$$\iint_R \sqrt{1-x^2} \, dA = \frac{1}{2} \pi (1)^2 \times 4 = 2\pi$$

■ **La regla del punto medio**

Los métodos que se usan para aproximar integrales simples (la regla del punto medio, la regla del trapecio, la regla de Simpson) tienen contrapartes para las integrales dobles. Aquí solo se considerará la regla del punto medio para integrales dobles. Esto significa que se usará una doble suma de Riemann para aproximar la integral doble, en la que como punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} se elige el centro (\bar{x}_i, \bar{y}_j) de R_{ij} . En otras palabras, \bar{x}_i es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y \bar{y}_j es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

Regla del punto medio para integrales dobles

$$\iint_R f(x, y) \, dA \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A$$

donde \bar{x}_i es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y \bar{y}_j es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

EJEMPLO 3 Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de la integral $\iint_R (x - 3y^2) \, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$.

SOLUCIÓN Al usar la regla del punto medio con $m = n = 2$, se evalúa $f(x, y) = x - 3y^2$ en los centros de los cuatro subrectángulos que aparecen en la figura 10. Así, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$, y $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \frac{1}{2}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) \, dA &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A \\ &= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1) \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \Delta A \\ &= f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) \Delta A \\ &= \left(-\frac{67}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{139}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{51}{16}\right) \frac{1}{2} + \left(-\frac{123}{16}\right) \frac{1}{2} \\ &= -\frac{95}{8} = -11.875 \end{aligned}$$

Así se tiene $\iint_R (x - 3y^2) \, dA \approx -11.875$

NOTA En el ejemplo 5 se verá que el valor exacto de la integral doble del ejemplo 3 es -12 . (Recuerde que la interpretación de una integral doble como un volumen es válida solo cuando el integrando f es una función *positiva*. El integrando del ejemplo 3 no es una función positiva, así que su integral no es un volumen. En los ejemplos 5 y 6 se estudiará cómo interpretar integrales de funciones que no siempre son positivas en términos de volúmenes.) Si se sigue dividiendo cada subrectángulo de la figura 10 en cuatro más pequeños de forma similar, se obtendrán las aproximaciones por la regla del punto medio que se presentan en la tabla al margen. Note cómo estas aproximaciones se acercan al valor exacto de la integral doble, -12 .

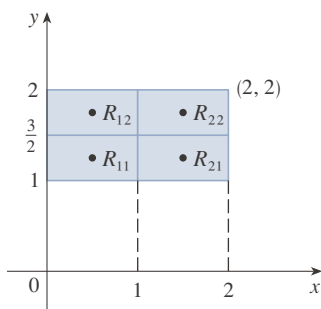


FIGURA 10

Número de subrectángulos	Aproximación por la regla del punto medio
1	-11.5000
4	-11.8750
16	-11.9687
64	-11.9922
256	-11.9980
1024	-11.9995

■ Integrales iteradas

Recuerde que suele ser difícil evaluar directamente integrales simples a partir de la definición de una integral, pero el teorema fundamental del cálculo proporciona un método mucho más fácil. La evaluación de integrales dobles con base en los principios elementales es aún más difícil, pero aquí se verá cómo expresar una integral doble como una integral iterada, la que después puede evaluarse calculando dos integrales simples.

Suponga que f es una función de dos variables integrable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y) dy$ para indicar que x se mantiene fija y que $f(x, y)$ se integra con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Este procedimiento se llama *integración parcial con respecto a y* . (Adviértase su semejanza con la derivación parcial.) Ahora $\int_c^d f(x, y) dy$ es un número que depende del valor de x , así que define a una función de x :

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Si integra ahora la función A con respecto a x de $x = a$ a $x = b$, se obtiene

$$\boxed{7} \quad \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

La integral en el miembro derecho de la ecuación 7 se llama **integral iterada**. Usualmente se omiten los corchetes. Así,

$$\boxed{8} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

significa que primero se integra con respecto a y de c a d , y después con respecto a x de a a b .

De igual forma, la integral iterada

$$\boxed{9} \quad \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

significa que primero se integra con respecto a x (considerando a y como si fuera constante) de $x = a$ a $x = b$, y después se integra la función resultante de y con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Note que en las ecuaciones 8 y 9 se trabaja *de adentro hacia fuera*.

EJEMPLO 4 Evalúe las integrales iteradas

$$(a) \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \quad (b) \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy$$

SOLUCIÓN

(a) Considerando a x como una constante, se obtiene

$$\int_1^2 x^2 y dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2$$

Así, la función A en el análisis precedente está dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ en este ejemplo. Ahora integre esta función de x de 0 a 3:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \left. \frac{x^3}{2} \right|_0^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

(b) Aquí integre primero con respecto a x :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy \\ &= \int_1^2 9y \, dy = 9 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Observe que en el ejemplo 4 se obtuvo la misma respuesta ya sea que se integrara primero con respecto a y o x . En general, resulta que las dos integrales iteradas de las ecuaciones 8 y 9 siempre son iguales (véase el teorema 10); es decir, el orden de la integración no importa. (Esto es similar al teorema de Clairaut sobre la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

El teorema siguiente da un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada (en cualquier orden).

El teorema 10 debe su nombre al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), quien comprobó una versión muy general de este teorema en 1907. Pero la versión para funciones continuas fue conocida por el matemático francés Augustin-Louis Cauchy casi un siglo antes.

10 Teorema de Fubini Si f es continua en el rectángulo

$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

En términos más generales, esto es cierto si se supone que f está acotada en R , f es discontinua solo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

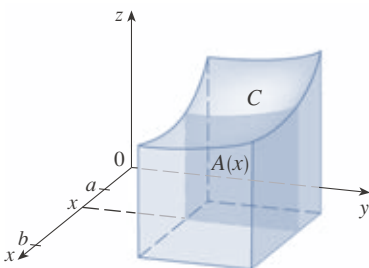


FIGURA 11

TEC Visual 15.1 ilustra el teorema de Fubini mostrando una animación de las figuras 11 y 12.

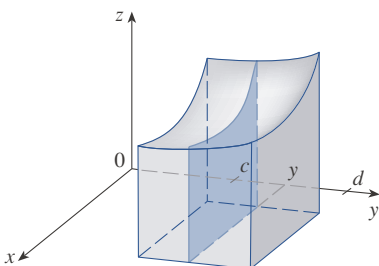


FIGURA 12

La comprobación del teorema de Fubini es demasiado difícil para incluirla en este libro, pero se puede dar, al menos, una indicación intuitiva de por qué es cierto para el caso en el que $f(x, y) \geq 0$. Recuerde que si f es positiva, se puede interpretar la integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$ como el volumen V del sólido S que se encuentra arriba de R y bajo la superficie $z = f(x, y)$. Pero se tiene otra fórmula que se usa para determinar el volumen en el capítulo 6, a saber

$$V = \int_a^b A(x) \, dx$$

donde $A(x)$ es el área de una sección transversal de S en el plano que pasa por x perpendicular al eje x . En la figura 11 puede verse que $A(x)$ es el área bajo la curva C cuya ecuación es $z = f(x, y)$, donde x se mantiene constante y $c \leq y \leq d$. Por tanto,

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

y se tiene

$$\iint_R f(x, y) \, dA = V = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

Un argumento similar, usando secciones transversales perpendiculares al eje y como el que se muestra en la figura 12, demuestra que

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

EJEMPLO 5 Evalúe la integral doble $\iint_R (x - 3y^2) dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$. (Compare con el ejemplo 3.)

SOLUCIÓN El teorema de Fubini da

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2) dy dx = \int_0^2 [xy - y^3]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 (x - 7) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_0^2 = -12 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Al aplicar de nuevo el teorema de Fubini, pero esta vez integrando primero con respecto a x , se tiene

$$\begin{aligned} \iint_R (x - 3y^2) dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy \\ &= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2) dy = \left[2y - 2y^3 \right]_1^2 = -12 \end{aligned}$$

Note la respuesta negativa en el ejemplo 5; no hay nada incorrecto en ella. La función f no es una función positiva, así que su integral no representa un volumen. De la figura 13 se deduce que f siempre es negativa en R , de manera que el valor de la integral es la *negativa* del volumen que está *sobre* la gráfica de f y *bajo* R .

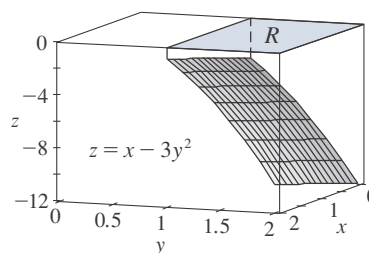


FIGURA 13

Para una función f que adopta valores tanto positivos como negativos, $\iint_R f(x, y) dA$ es una diferencia de volúmenes: $V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen sobre R y bajo la gráfica de f y V_2 es el volumen bajo R y sobre la gráfica. El hecho de que la integral del ejemplo 6 sea 0 significa que ambos volúmenes V_1 y V_2 son iguales. (Véase la figura 14.)

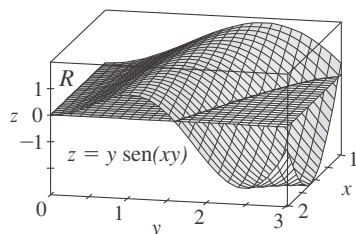


FIGURA 14

EJEMPLO 6 Evalúe $\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUCIÓN Si se integra primero con respecto a x , se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 y \operatorname{sen}(xy) dx dy \\ &= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^\pi (-\cos 2y + \cos y) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} y \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

NOTA Si se invierte el orden de integración y se integra primero con respecto a y en el ejemplo 6, se obtiene

$$\iint_R y \operatorname{sen}(xy) dA = \int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy) dy dx$$

pero este orden de integración es mucho más difícil que el método dado en el ejemplo, porque implica integración por partes dos veces. Así, al evaluar integrales dobles resulta prudente elegir el orden de integración que producirá integrales más simples.

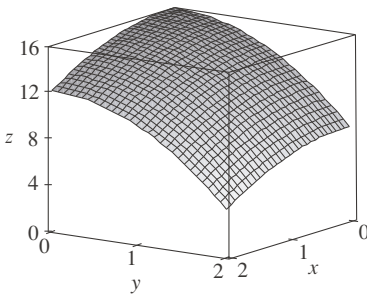


FIGURA 15

EJEMPLO 7 Determine el volumen del sólido S acotado por el paraboloido elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$, y los tres planos de coordenadas.

SOLUCIÓN Se observa primeramente que S es el sólido que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - 2y^2$ y sobre el cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Véase la figura 15.) Este sólido se consideró en el ejemplo 1, pero ahora se está en condiciones de evaluar la integral doble usando el teorema de Fubini. Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2) dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^3 - 2y^2x \right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^2 = 48 \end{aligned}$$

En el caso especial en que $f(x, y)$ pueda factorizarse como el producto únicamente de una función de x y solamente una función de y , la integral doble de f puede escribirse en una forma particularmente simple. En específico, suponga que $f(x, y) = g(x)h(y)$ y $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces, el teorema de Fubini da

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) dx \right] dy$$

En la integral interior, y es una constante, así que $h(y)$ es una constante y se puede escribir

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y) dx \right] dy = \int_c^d \left[h(y) \left(\int_a^b g(x) dx \right) \right] dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$$

puesto que $\int_a^b g(x) dx$ es una constante. Así, en este caso la integral doble de f puede escribirse como el producto de dos integrales simples:

11 $\iint_R g(x)h(y) dA = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$ donde $R = [a, b] \times [c, d]$

EJEMPLO 8 Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, entonces, por la ecuación 11,

$$\begin{aligned} \iint_R \sin x \cos y dA &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx \int_0^{\pi/2} \cos y dy \\ &= [-\cos x]_0^{\pi/2} [\sin y]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

La función $f(x, y) = \sin x \cos y$ del ejemplo 8 es positiva en R , así que la integral representa el volumen del sólido sobre R y bajo la gráfica de f que aparece en la figura 16.

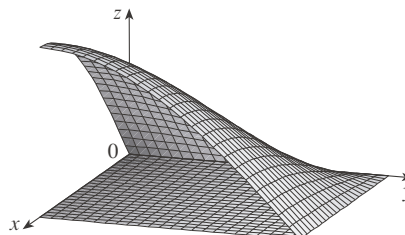


FIGURA 16

■ Valor promedio

Recuerde de la sección 6.5 que el valor promedio de una función f de una variable definida en un intervalo $[a, b]$ es

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

En forma similar, se define el **valor promedio** de una función f de dos variables delimitadas en un rectángulo R como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA$$

donde $A(R)$ es el área de R .

Si $f(x, y) \geq 0$, la ecuación

$$A(R) \times f_{\text{prom}} = \iint_R f(x, y) dA$$

indica que la caja con base R y altura f_{prom} tiene el mismo volumen que el sólido bajo la gráfica de f . [Si $z = f(x, y)$ describe una región montañosa y se cortan las cimas de las montañas en la altura f_{prom} , se pueden usar para rellenar los valles a fin de que la región se vuelva completamente plana. Véase la figura 17.]

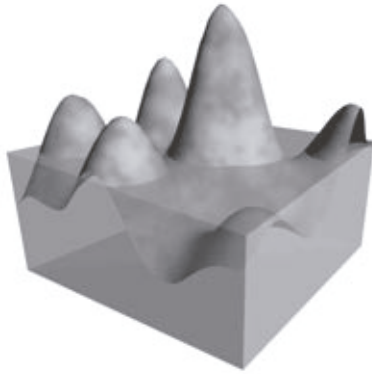


FIGURA 17

EJEMPLO 9 El mapa de contorno de la figura 18 muestra la altura en pulgadas de la nieve que cayó en el estado de Colorado durante el 20 y 21 de diciembre de 2006. (Ese estado tiene la forma de un rectángulo que mide 388 millas de oeste a este y 276 millas de sur a norte.) Use el mapa de contorno para estimar la nevada promedio en todo el estado de Colorado en esos días.

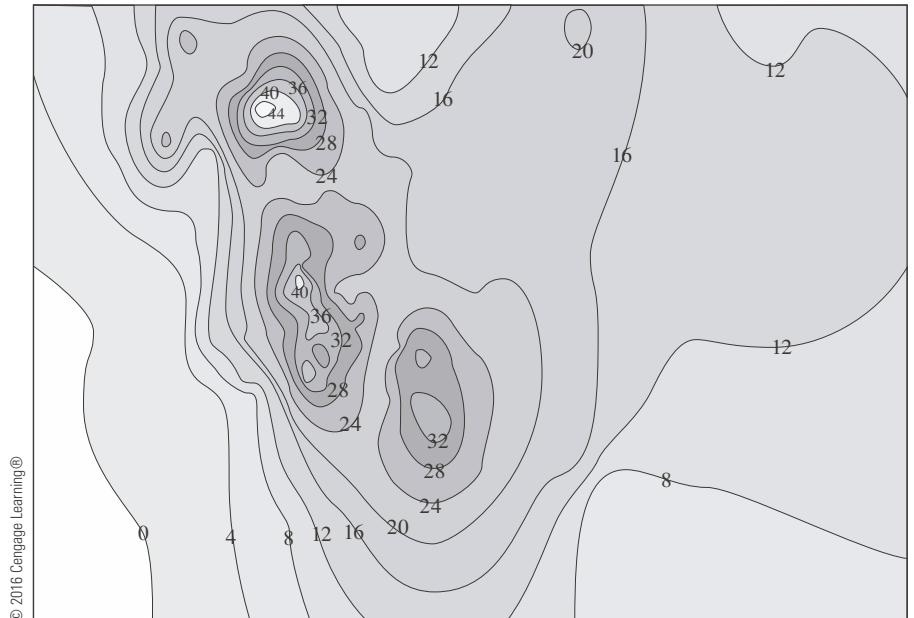


FIGURA 18

SOLUCIÓN Sitúe el origen en la esquina suroeste de ese estado. Entonces $0 \leq x \leq 388$, $0 \leq y \leq 276$ y $f(x, y)$ es la caída de nieve, en pulgadas, en un lugar a x millas al este y a y millas al norte del origen. Si R es el rectángulo que representa a Colorado, la nevada promedio para ese estado del 20 al 21 de diciembre fue

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y) dA$$

donde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimar el valor de esta integral doble, se usa la regla del punto medio con $m = n = 4$. En otras palabras, se divide R en 16 subrectángulos de igual tamaño, como en la figura 19. El área de cada subrectángulo es

$$\Delta A = \frac{1}{16}(388)(276) = 6693 \text{ mi}^2$$

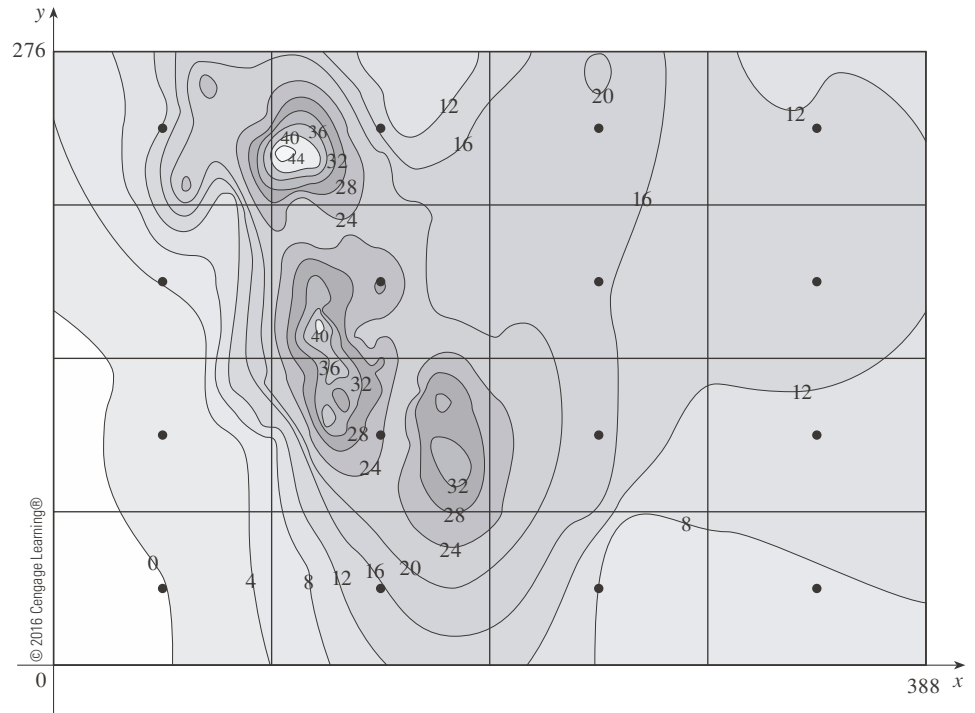


FIGURA 19

Usando el mapa de contorno para estimar el valor de f en el centro de cada subrectángulo, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &\approx \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta A \\ &\approx \Delta A [0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18.5 + 11 \\ &\quad + 4.5 + 28 + 17 + 13.5 + 12 + 15 + 17.5 + 13] \\ &= (6693)(207) \end{aligned}$$

Por tanto,
$$f_{\text{prom}} \approx \frac{(6693)(207)}{(388)(276)} \approx 12.9$$

El 20 y 21 de diciembre de 2006, Colorado recibió un promedio de aproximadamente 13 pulgadas de nieve. ■

15.1 EJERCICIOS

1. (a) Estime el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie $z = xy$ y sobre el rectángulo

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\}$$

Use la suma de Riemann con $m = 3, n = 2$ y elija como punto muestra la esquina superior derecha de cada cuadrado.

- (b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del sólido del inciso (a).
2. Si $R = [0, 4] \times [-1, 2]$, use la suma de Riemann con $m = 2, n = 3$ para estimar el valor de $\iint_R (1 - xy^2) dA$. Elija como puntos muestra (a) las esquinas inferiores derechas y (b) las esquinas superiores izquierdas de los rectángulos.

3. (a) Use la suma de Riemann con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R xe^{-xy} dA$, donde $R = [0, 2] \times [0, 1]$. Elija como puntos muestra las esquinas superiores derechas.
- (b) Use la regla del punto medio para estimar la integral en el inciso (a).

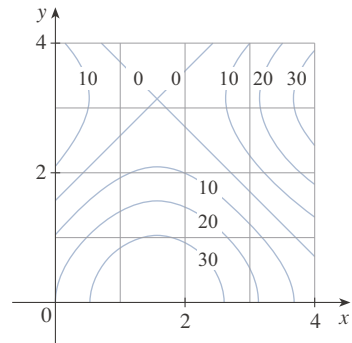
4. (a) Estime el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie $z = 1 + x^2 + 3y$ y sobre el rectángulo $R = [1, 2] \times [0, 3]$. Use la suma de Riemann con $m = n = 2$ y elija como puntos muestra las esquinas inferiores izquierdas.
- (b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del inciso (a).

5. Sea V el volumen del sólido que se encuentra bajo la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ y sobre el rectángulo dado por $2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 6$. Use las rectas $x = 3$ y $y = 4$ para dividir R en subrectángulos. Sean L y U las sumas de Riemann calculadas usando las esquinas inferiores izquierdas y las esquinas superiores derechas, respectivamente. Sin calcular los números V, L y U , dispóngalos en orden creciente y explique su razonamiento.

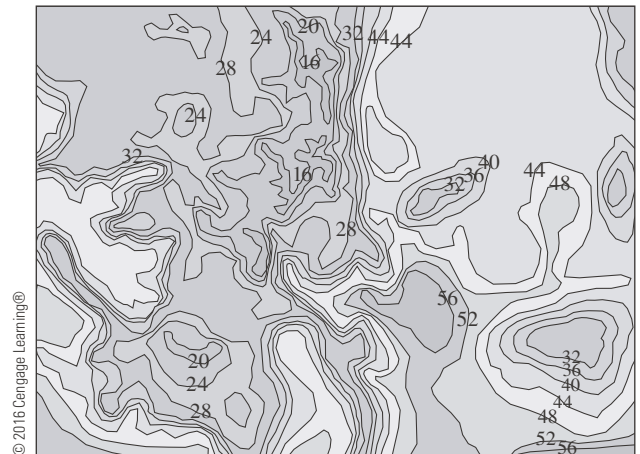
6. Una piscina de 8 por 12 metros está llena de agua. La profundidad se mide en intervalos de 2 m a partir de una esquina de la piscina y los valores se registran en la tabla. Estime el volumen de agua en la piscina.

	0	2	4	6	8	10	12
0	1	1.5	2	2.4	2.8	3	3
2	1	1.5	2	2.8	3	3.6	3
4	1	1.8	2.7	3	3.6	4	3.2
6	1	1.5	2	2.3	2.7	3	2.5
8	1	1	1	1	1.5	2	2

7. Se muestra un mapa de contorno para una función f en el cuadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.
- (a) Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x, y) dA$.
- (b) Estime el valor promedio de f .



8. El mapa de contorno muestra la temperatura, en grados Fahrenheit, a las cuatro de la tarde del 26 de febrero de 2007 en Colorado. (Este estado mide 388 millas de oeste a este y 276 millas de sur a norte.) Use la regla del punto medio con $m = n = 4$ para estimar la temperatura promedio en Colorado a esa hora.



- 9-11 Evalúe la integral doble identificándola primero como el volumen de un sólido.

9. $\iint_R \sqrt{2} dA, R = \{(x, y) \mid 2 \leq x \leq 6, -1 \leq y \leq 5\}$
10. $\iint_R (2x + 1) dA, R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$
11. $\iint_R (4 - 2y) dA, R = [0, 1] \times [0, 1]$

12. La integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2} dA$, donde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa el volumen de un sólido. Trace el sólido.

- 13-14 Determine $\int_0^2 f(x, y) dx$ y $\int_0^3 f(x, y) dy$

13. $f(x, y) = x + 3x^2y^2$ 14. $f(x, y) = y\sqrt{x + 2}$

- 15-26 Calcule la integral iterada.

15. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x) dy dx$ 16. $\int_0^1 \int_0^1 (x + y)^2 dx dy$

17. $\int_0^1 \int_1^2 (x + e^{-y}) dx dy$
 18. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} (\text{sen } x + \text{sen } y) dy dx$
 19. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \text{sen } y dy dx$
 20. $\int_1^3 \int_1^5 \frac{\ln y}{xy} dy dx$
 21. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$
 22. $\int_0^1 \int_0^2 ye^{x-y} dx dy$
 23. $\int_0^3 \int_0^{\pi/2} t^2 \text{sen}^3 \phi d\phi dt$
 24. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy dx$
 25. $\int_0^2 \int_0^\pi r \text{sen}^2 \theta d\theta dr$
 26. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y} dx dy$

27-34 Calcule la integral doble.

27. $\iint_R x \text{sec}^2 y dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi/4\}$
 28. $\iint_R (y + xy^{-2}) dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$
 29. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$
 30. $\iint_R \frac{\tan \theta}{\sqrt{1-t^2}} dA, \quad R = \{(\theta, t) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/3, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\}$
 31. $\iint_R x \text{sen}(x+y) dA, \quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$
 32. $\iint_R \frac{1+x^2}{1+y^2} dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
 33. $\iint_R \text{sen}(x-y) dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\}$
 34. $\iint_R \frac{1}{1+x+y} dA, \quad R = [1, 3] \times [1, 2]$

35-36 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

35. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y) dx dy$
 36. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2) dy dx$

37. Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el plano $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ y sobre el rectángulo $R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$.
 38. Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ y sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [1, 2]$.

39. Determine el volumen del sólido que se tiende bajo el paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ y sobre el rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.
 40. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x^2 + xy^2$ y los planos $z = 0, x = 0, x = 5$ y $y = \pm 2$.
 41. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + x^2ye^y$ y los planos $z = 0, x = \pm 1, y = 0$ y $y = 1$.
 42. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + e^x \text{sen } y$ y los planos $x = \pm 1, y = 0, y = \pi$ y $z = 0$.
 43. Determine el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = x \text{sec}^2 y$ y los planos $z = 0, x = 0, x = 2, y = 0$ y $y = \pi/4$.
 44. Grafique el sólido que se ubica entre la superficie $z = 2xy/(x^2 + 1) + 2y$ y el plano $z = x + 2y$ y es acotado por los planos $x = 0, x = 2, y = 0$ y $y = 4$. Halle después su volumen.

SAC 45. Use un sistema algebraico computacional para hallar el valor exacto de la integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy} dA$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Use después el SAC para dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral.

SAC 46. Grafique el sólido que se ubica entre las superficies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ y $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Use un sistema algebraico computacional para aproximar el volumen de este sólido con cuatro decimales.

- 47-48 Determine el valor promedio de f en el rectángulo dado.
 47. $f(x, y) = x^2 y, R$ tiene vértices $(-1, 0), (-1, 5), (1, 5), (1, 0)$
 48. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}, \quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

49-50 Use simetría para evaluar la integral doble.

49. $\iint_R \frac{xy}{1+x^4} dA, \quad R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
 50. $\iint_R (1 + x^2 \text{sen } y + y^2 \text{sen } x) dA, \quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

SAC 51. Use un SAC para calcular las integrales iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$$

¿Las respuestas contradicen el teorema de Fubini? Explique lo que sucede.

52. (a) ¿En qué sentido son similares los teoremas de Fubini y de Clairaut?
 (b) Si $f(x, y)$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ y

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t) dt ds$$

para $a < x < b, c < y < d$, demuestre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.2 Integrales dobles en regiones generales

Para integrales simples, la región en la que se integra es siempre un intervalo. Pero para integrales dobles, debe ser capaz de integrar una función f no solo en rectángulos, sino también en regiones D de forma más general, como la que se ilustra en la figura 1. Se supone que D es una región acotada, lo que significa que D puede estar encerrada en una región rectangular R como en la figura 2. Luego se define una nueva función F con dominio R mediante

$$\boxed{1} \quad F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

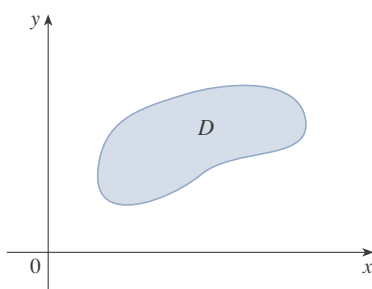


FIGURA 1

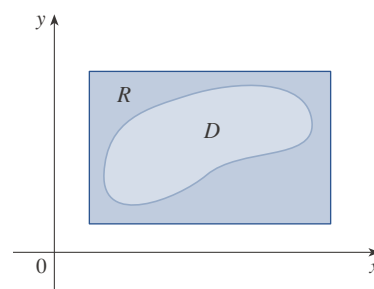


FIGURA 2

Si F es integrable en R , se define la **integral doble** de f sobre D mediante

$$\boxed{2} \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \iint_R F(x, y) \, dA \quad \text{donde } F \text{ está dada por la ecuación 1}$$

La definición 2 tiene sentido porque R es un rectángulo, así que $\iint_R F(x, y) \, dA$ fue previamente definida en la sección 15.1. El procedimiento que se ha usado es razonable porque los valores de $F(x, y)$ son de 0 cuando (x, y) se encuentra fuera de D y por tanto no hacen ninguna contribución a la integral. Esto significa que no importa qué rectángulo R se use mientras contenga D .

En el caso en el que $f(x, y) \geq 0$, aún se puede interpretar $\iint_D f(x, y) \, dA$ como el volumen del sólido que se encuentra sobre D y bajo la superficie $z = f(x, y)$ (la gráfica de f). Puede verse que esto es razonable comparando las gráficas de f y F en las figuras 3 y 4, respectivamente, y recordando que $\iint_R F(x, y) \, dA$ es el volumen bajo la gráfica de F .

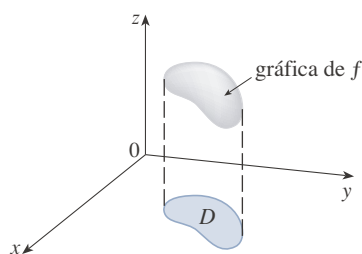


FIGURA 3

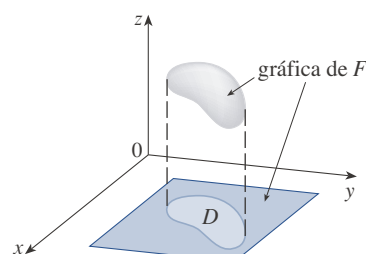


FIGURA 4

La figura 4 también muestra que es probable que F tenga discontinuidades en los puntos frontera de D . No obstante, si f es continua en D y la curva frontera de D “se porta bien” (en un sentido que está fuera del alcance de este libro), se puede demostrar que

$\iint_R F(x, y) dA$ existe y por tanto que $\iint_D f(x, y) dA$ existe. En particular, este es el caso para los dos tipos de regiones siguientes.

Se dice que una región en un plano D es de **tipo I** si se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de x , es decir

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Algunos ejemplos de regiones tipo I aparecen en la figura 5.

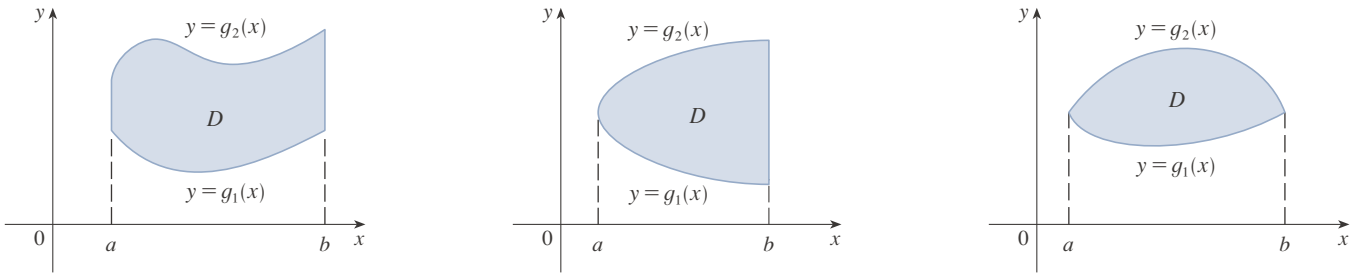


FIGURA 5
Algunas regiones tipo I

Para evaluar $\iint_D f(x, y) dA$ cuando D es una región de tipo I, se elige un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contenga D , como en la figura 6, y se concede que F es la función dada por la ecuación 1; es decir, F coincide con f en D y F es de 0 fuera de D . Así, por el teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque (x, y) reside entonces fuera de D . Por tanto,

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ cuando $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Así se tiene la fórmula siguiente que permite evaluar la integral doble como una integral iterada.

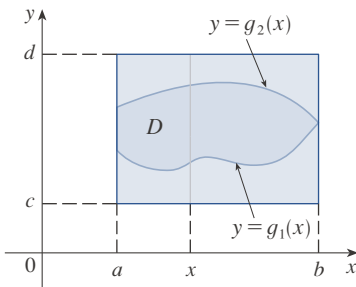


FIGURA 6

3 Si f es continua en una región D tipo I, tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

La integral en el miembro derecho de (3) es una integral iterada similar a las que se consideran en la sección precedente, excepto que en la integral interior se considera a x como constante no solo en $f(x, y)$, sino también en los límites de integración, $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

También se consideran regiones en un plano de **tipo II**, que pueden expresarse como

4
$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas. Dos de esas regiones se ilustran en la figura 7.

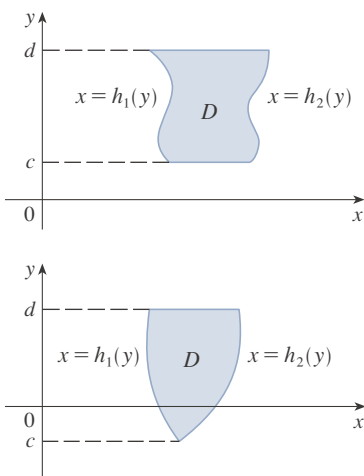


FIGURA 7
Algunas regiones tipo II

Usando los mismos métodos que se emplearon para establecer (3), se puede demostrar que

$$\boxed{5} \quad \iint_D f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

donde D es una región tipo II dada por la ecuación 4.

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_D (x + 2y) \, dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

SOLUCIÓN Las parábolas intersecan cuando $2x^2 = 1 + x^2$, es decir $x^2 = 1$, así que $x = \pm 1$. Se advierte que la región D , representada en la figura 8, es una región tipo I y no una región tipo II y se puede escribir

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

Como la frontera inferior es $y = 2x^2$ y la frontera superior es $y = 1 + x^2$, la ecuación 3 da

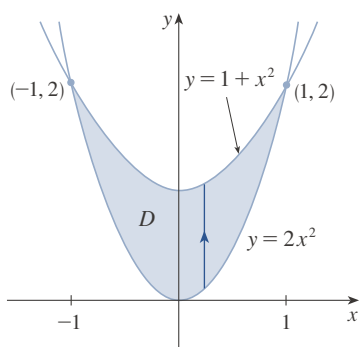


FIGURA 8

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 2y) \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y) \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} \, dx \\ &= \int_{-1}^1 [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2] \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) \, dx \\ &= -3 \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^1 = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

NOTA Cuando se establece una integral doble como en el ejemplo 1, es esencial dibujar un diagrama. A menudo es útil dibujar una flecha vertical como en la figura 8. Entonces, los límites de integración para la integral interior pueden tomarse del diagrama, como sigue: la flecha comienza en la frontera inferior $y = g_1(x)$, que da el límite inferior de la integral, y termina en la frontera superior $y = g_2(x)$, que da el límite superior de integración. Para una región tipo II, la flecha se traza horizontalmente, de la frontera izquierda a la frontera derecha.

EJEMPLO 2 Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y sobre la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN En la figura 9 se ve que D es una región tipo I y

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

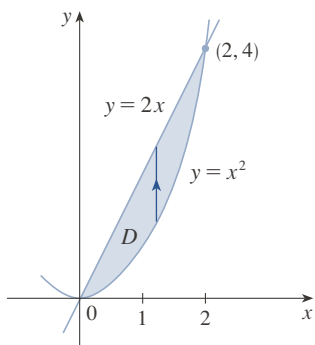


FIGURA 9

D como región tipo I

La figura 10 muestra el sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 2. Este se halla sobre el plano xy , bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y entre el plano $y = 2x$ y el cilindro parabólico $y = x^2$.

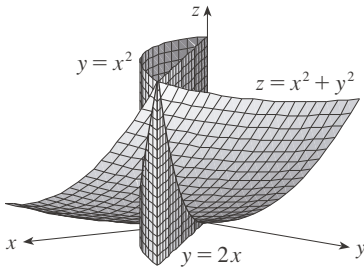


FIGURA 10

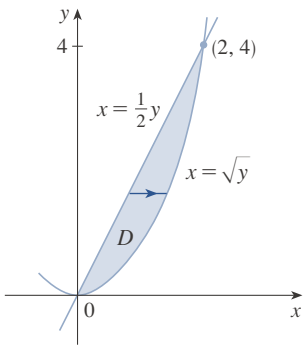


FIGURA 11 Representación de D como una región tipo II

Por tanto, el volumen bajo $z = x^2 + y^2$ sobre D es

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx \\ &= \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right]_0^2 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 En la figura 11 se ve que D también puede escribirse como una región tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

En consecuencia, otra expresión para V es

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{2}{15}y^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2} - \frac{13}{96}y^4 \right]_0^4 = \frac{216}{35} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_D xy dA$, donde D es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN La región D se muestra en la figura 12. También en este caso, D es tanto tipo I como tipo II, aunque la descripción de D como una región tipo I es más complicada, porque la frontera inferior consta de dos partes. Por consiguiente, se prefiere expresar D como una región tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1\}$$

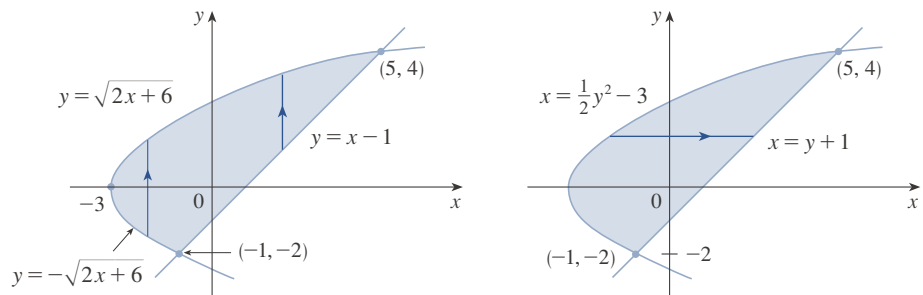


FIGURA 12 (a) Representación de D como una región tipo I (b) Representación de D como una región tipo II

Entonces, al utilizar la ecuación 5 se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy \, dx \, dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right)^2 \right] dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36 \end{aligned}$$

Si se hubiera expresado D como región tipo I usando la figura 12(a), se habría obtenido

$$\iint_D xy \, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx + \int_{-1}^5 \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy \, dy \, dx$$

pero esto habría implicado más trabajo que el otro método. ■

EJEMPLO 4 Determine el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $y = z = 0$.

SOLUCIÓN En una cuestión como esta, es prudente dibujar dos diagramas: uno del sólido tridimensional y otro de la región en un plano D en la que se encuentra. La figura 13 muestra el tetraedro T acotado por los planos de coordenadas $x = 0$, $z = 0$, el plano vertical $x = 2y$ y el plano $x + 2y + z = 2$. Como el plano $x + 2y + z = 2$ interseca el plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la recta $x + 2y = 2$, se ve que T se sitúa sobre la región triangular D en el plano xy acotado por las rectas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$. (Véase la figura 14.)

El plano $x + 2y + z = 2$ puede escribirse como $z = 2 - x - 2y$, así que el volumen requerido se tiene bajo la gráfica de la función $z = 2 - x - 2y$ y sobre

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x/2 \leq y \leq 1 - x/2 \right\}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D (2 - x - 2y) \, dA \\ &= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2 \right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\ &= \int_0^1 \left[2 - x - x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \right] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

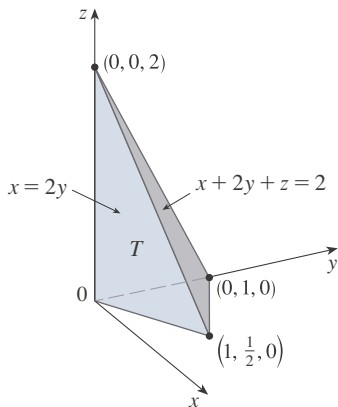


FIGURA 13

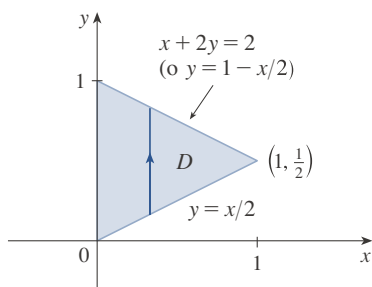


FIGURA 14

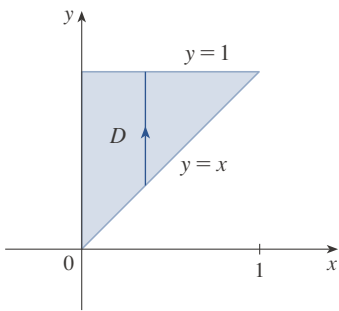


FIGURA 15
D como región tipo I

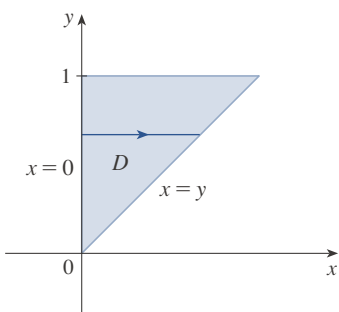


FIGURA 16
D como región tipo II

EJEMPLO 5 Evalúe la integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) dy dx$.

SOLUCIÓN Si se intenta evaluar la integral tal como está, se enfrenta a la tarea de evaluar primeramente $\int \text{sen}(y^2) dy$. Pero esto es imposible de hacer en términos finitos, porque $\int \text{sen}(y^2) dy$ no es una función elemental. (Véase el final de la sección 7.5.) Así, se debe cambiar el orden de integración. Esto se hace expresando primero la integral iterada dada como una integral doble. Si se escribe la ecuación 3 con el lado derecho a la izquierda, se tiene

$$\int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) dy dx = \iint_D \text{sen}(y^2) dA$$

donde

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

La región D se representa en la figura 15. En la figura 16 se ve que una descripción alternativa de D es

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

Esto permite usar (5) para expresar la integral doble como una integral iterada en el orden inverso:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \text{sen}(y^2) dy dx &= \iint_D \text{sen}(y^2) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^y \text{sen}(y^2) dx dy = \int_0^1 [x \text{sen}(y^2)]_{x=0}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 y \text{sen}(y^2) dy = \left[-\frac{1}{2} \cos(y^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \cos 1) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

■ Propiedades de las integrales dobles

Suponga que todas las integrales siguientes existen. Para regiones rectangulares D , las tres primeras prioridades pueden comprobarse de la misma manera que en la sección 5.2. Para regiones generales, las propiedades se desprenden de la definición 2.

6 $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA$

7 $\iint_D c f(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA$ donde c es una constante

Si $f(x, y) \geq g(x, y)$ para todas las (x, y) en D , entonces

8 $\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$

La propiedad de las integrales dobles siguiente es similar a la propiedad de las integrales simples dada por la ecuación $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se traslapan excepto quizá en sus fronteras (véase la figura 17), entonces

9 $\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA$

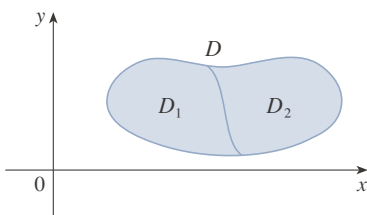


FIGURA 17

La propiedad 9 puede usarse para evaluar integrales dobles en regiones D que no son del tipo I ni del tipo II pero que pueden expresarse como una unión de regiones del tipo I o el tipo II. La figura 18 ilustra este procedimiento. (Véase los ejercicios 57 y 58.)

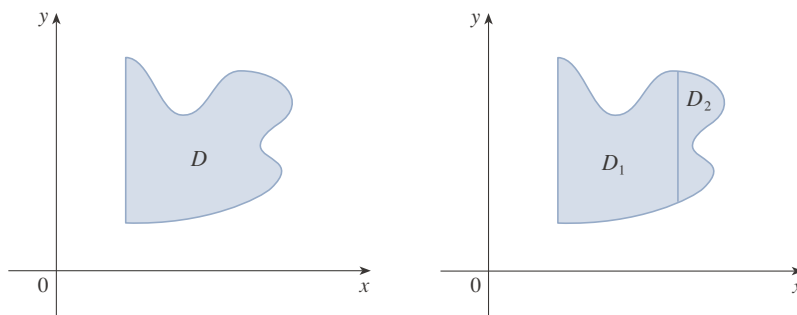


FIGURA 18

(a) D no es del Tipo I ni del tipo II.

(b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 es tipo I, D_2 es tipo II.

La propiedad de las integrales siguiente indica que si se integra la función constante $f(x, y) = 1$ en una región D , se obtiene el área de D :

10

$$\iint_D 1 \, dA = A(D)$$

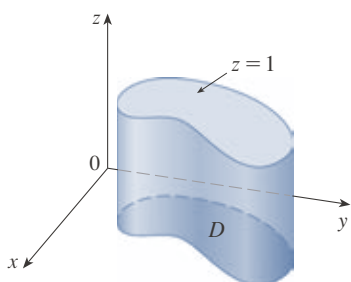


FIGURA 19

Cilindro con base D y altura $z = 1$

La figura 19 ilustra por qué la ecuación 10 es cierta: un cilindro sólido cuya base es D y cuya altura es 1 tiene volumen $A(D) \cdot 1 = A(D)$, pero se sabe que también se puede escribir su volumen como $\iint_D 1 \, dA$.

Por último, se pueden combinar las propiedades 7, 8 y 10 para comprobar la propiedad siguiente. (Véase el ejercicio 63.)

11

Si $m \leq f(x, y) \leq M$ para todas las (x, y) en D , entonces

$$mA(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq MA(D)$$

EJEMPLO 6 Use la propiedad 11 para estimar la integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2.

SOLUCIÓN Como $-1 \leq \sin x \leq 1$ y $-1 \leq \cos y \leq 1$, se tiene $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$, y por tanto

$$e^{-1} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e^1 = e$$

Así, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$, y $A(D) = \pi(2)^2$ en la propiedad 11, se obtiene

$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA \leq 4\pi e$$



15.2 EJERCICIOS**1-6** Evalúe la integral iterada.

1. $\int_1^5 \int_0^x (8x - 2y) dy dx$

2. $\int_0^2 \int_0^{y^2} x^2 y dx dy$

3. $\int_0^1 \int_0^y x e^{y^3} dx dy$

4. $\int_0^{\pi/2} \int_0^x x \operatorname{sen} y dy dx$

5. $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3) dt ds$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1-v^2} du dv$

7-10 Evalúe la integral doble.

7. $\iint_D \frac{y}{x^2 + 1} dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

8. $\iint_D (2x + y) dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, y - 1 \leq x \leq 1\}$

9. $\iint_D e^{-y^2} dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq y\}$

10. $\iint_D y\sqrt{x^2 - y^2} dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$

11. Dibuje un ejemplo de una región que sea

- (a) tipo I pero no tipo II
-
- (b) tipo II pero no tipo I

12. Dibuje un ejemplo de una región que sea

- (a) tanto tipo I como tipo II
-
- (b) ni tipo I ni tipo II

13-14 Expresé D como una región de tipo I y también como una región de tipo II. Evalúe después la integral doble de las dos maneras.

13. $\iint_D x dA, \quad D$ está encerrada por las rectas $y = x, y = 0, x = 1$

14. $\iint_D xy dA, \quad D$ está encerrada por las curvas $y = x^2, y = 3x$

15-16 Establezca integrales iteradas para ambos órdenes de integración. Evalúe después la integral doble usando el orden más fácil y explique por qué es más fácil.

15. $\iint_D y dA, \quad D$ está acotada por $y = x - 2, x = y^2$

16. $\iint_D y^2 e^{xy} dA, \quad D$ está acotada por $y = x, y = 4, x = 0$

17-22 Evalúe la integral doble.

17. $\iint_D x \cos y dA, \quad D$ está acotada por $y = 0, y = x^2, x = 1$


18. $\iint_D xy^2 dA, \quad D$ está acotada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1 - y^2}$

19. $\iint_D y^2 dA, \quad D$ es la región triangular con vértices $(0, 1), (1, 2), (4, 1)$

20. $\iint_D xy dA, \quad D$ está encerrada por el cuarto de círculo $y = \sqrt{1 - x^2}, x \geq 0$ y los ejes

21. $\iint_D (2x - y) dA, \quad D$ está acotada por el círculo con centro en el origen y radio 2

22. $\iint_D y dA, \quad D$ es la región triangular con vértices $(0, 0), (1, 1)$ y $(4, 0)$

23-32 Halle el volumen del sólido dado.**23.** Bajo el plano $3x + 2y - z = 0$ y sobre la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ **24.** Bajo la superficie $z = 2x + y^2$ y sobre la región acotada por $x = y^2$ y $x = y^3$ **25.** Bajo la superficie $z = xy$ y sobre el triángulo con vértices $(1, 1), (4, 1)$ y $(1, 2)$ **26.** Encerrado por el paraboloides $z = x^2 + y^2 + 1$ y los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $x + y = 2$ **27.** El tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano $2x + y + z = 4$ **28.** Encerrado por el paraboloides $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0, y = 1, y = x, z = 0$ **29.** Acotado por los planos de coordenadas y el plano $3x + 2y + z = 6$ **30.** Acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y, x = 0, z = 0$ en el primer octante**31.** Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z, x = 0, z = 0$ en el primer octante**32.** Acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$  **33.** Use una calculadora graficadora o computadora para estimar las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = x^4$ y $y = 3x - x^2$. Si D es la región acotada por estas curvas, estime $\iint_D x dA$.

- 34.** Determine el volumen aproximado del sólido en el primer octante acotado por los planos $y = x$, $z = 0$ y $z = x$ y el cilindro $y = \cos x$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección.)
- 35-38** Determine el volumen del sólido restando dos volúmenes.
- 35.** El sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ y los planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$
- 36.** El sólido encerrado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $z = 3y$, $z = 2 + y$
- 37.** El sólido bajo el plano $z = 3$, sobre el plano $z = y$, y entre los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $y = 1 - x^2$
- 38.** El sólido en el primer octante bajo el plano $z = x + y$, sobre la superficie $z = xy$, y encerrado por las superficies $x = 0$, $y = 0$ y $x^2 + y^2 = 4$

39-40 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

39. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx$ **40.** $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x) dy dx$

41-44 Use un sistema algebraico computacional para hallar el volumen exacto del sólido.

- 41.** Bajo la superficie $z = x^3y^4 + xy^2$ y sobre la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$ para $x \geq 0$
- 42.** Entre los paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - 2y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
- 43.** Encerrado por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$
- 44.** Encerrado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2y$

45-50 Trace la región de integración y cambie el orden de integración.

45. $\int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy$ **46.** $\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y) dy dx$

47. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y) dy dx$ **48.** $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy$

49. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$ **50.** $\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y) dy dx$

51-56 Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración.

51. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ **52.** $\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \sin y dy dx$

53. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3 + 1} dy dx$

54. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 y \cos(x^3 - 1) dx dy$

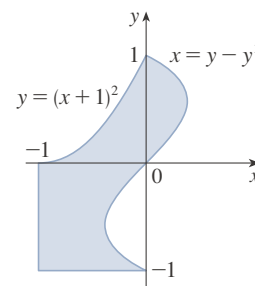
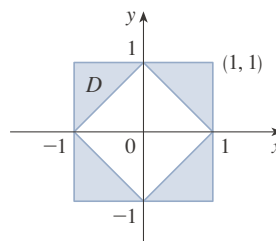
55. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx$

56. $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx$

57-58 Expresé D como una unión de regiones de tipo I o tipo II y evalúe la integral.

57. $\iint_D x^2 dA$

58. $\iint_D y dA$



59-60 Use la propiedad 11 para estimar el valor de la integral.

59. $\iint_S \sqrt{4 - x^2y^2} dA$, $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$

60. $\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2} dA$, Q es el cuarto de círculo con centro en el origen y radio $\frac{1}{2}$ en el primer cuadrante

61-62 Halle el valor promedio de f en la región D .

61. $f(x, y) = xy$, D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 3)$

62. $f(x, y) = x \sin y$, D está encerrada por las curvas $y = 0$, $y = x^2$ y $x = 1$

63. Compruebe la propiedad 11.

64. Al evaluar una integral doble en una región D , se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) dx dy$$

Trace la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

65-69 Use geometría o simetría, o ambas, para evaluar la integral doble.

65. $\iint_D (x + 2) dA,$

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}$

66. $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dA,$ D es el disco con centro en el origen y radio R

67. $\iint_D (2x + 3y) dA,$ D es el rectángulo $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$

68. $\iint_D (2 + x^2y^3 - y^2 \text{sen } x) dA,$

$D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$

69. $\iint_D (ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2}) dA,$

$D = [-a, a] \times [-b, b]$

SAC 70. Grafique el sólido acotado por el plano $x + y + z = 1$ y el paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ y determine su volumen exacto. (Use su SAC para hacer la graficación, hallar las ecuaciones de las curvas frontera de la región de integración y evaluar la integral doble.)

15.3 Integrales dobles en coordenadas polares

Suponga que se quiere evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y) dA$, donde R es una de las regiones que aparecen en la figura 1. En cualquier caso, la descripción de R en términos de coordenadas rectangulares es bastante complicada, pero R es fácil de describir usando coordenadas polares.

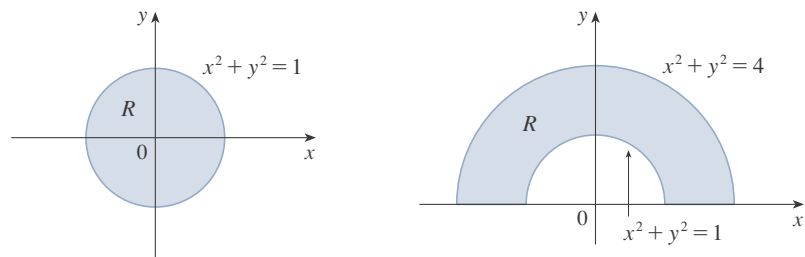


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

(b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

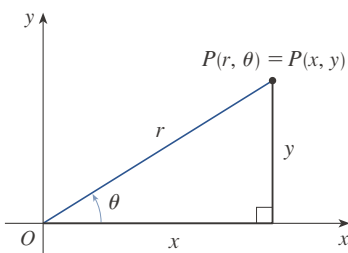


FIGURA 2

Recuerde de la figura 2 que las coordenadas polares (r, θ) de un punto se relacionan con las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las ecuaciones

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad x = r \cos \theta \quad y = r \text{sen } \theta$$

(Véase la sección 10.3.)

Las regiones en la figura 1 son casos especiales de un **rectángulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

el cual se muestra en la figura 3. Para calcular la integral doble $\iint_R f(x, y) dA$, donde R es un rectángulo polar, se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de igual ancho $\Delta r = (b - a)/m$ y se divide el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de igual ancho $\Delta \theta = (\beta - \alpha)/n$. Entonces los círculos $r = r_i$ y los rayos $\theta = \theta_j$ dividen el rectángulo polar R en los más pequeños rectángulos polares R_{ij} que aparecen en la figura 4.

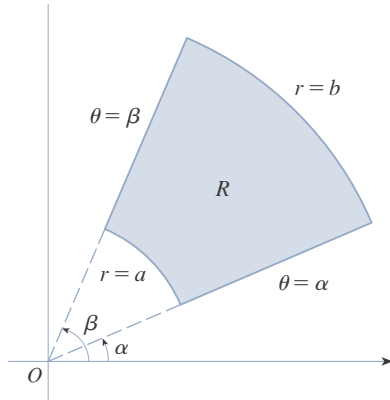


FIGURA 3 Rectángulo polar

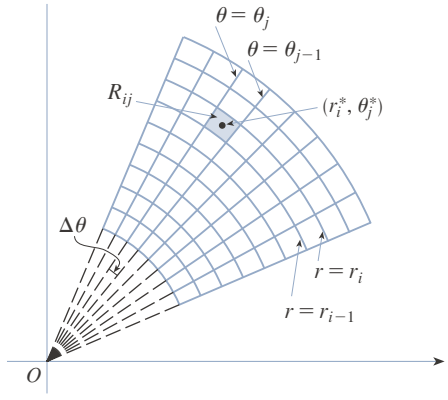


FIGURA 4 División de R en subrectángulos polares

El “centro” del subrectángulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

tiene coordenadas polares

$$r_i^* = \frac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \quad \theta_j^* = \frac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Se calcula el área de R_{ij} usando el hecho de que el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ es $\frac{1}{2}r^2\theta$. Restando las áreas de dos de esos sectores, cada uno de los cuales tiene ángulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, se determina que el área de R_{ij} es

$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \frac{1}{2}r_i^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}r_{i-1}^2 \Delta\theta = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2) \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) \Delta\theta = r_i^* \Delta r \Delta\theta \end{aligned}$$

Aunque se ha definido la integral doble $\iint_R f(x, y) \, dA$ en términos de rectángulos ordinarios, se puede demostrar que, para funciones continuas f , siempre se obtiene la misma respuesta usando rectángulos polares. Las coordenadas rectangulares del centro de R_{ij} son $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*)$, así que una típica suma de Riemann es

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) r_i^* \Delta r \Delta\theta$$

Si se escribe $g(r, \theta) = rf(r \cos \theta, r \sin \theta)$, la suma de Riemann de la ecuación 1 puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta\theta$$

la cual es una suma de Riemann para la integral doble

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) \, dr \, d\theta$$

Por tanto se tiene

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) \, dA &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \sin \theta_j^*) \Delta A_i \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r \Delta\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b g(r, \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

2 Cambio a coordenadas polares en una integral doble Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leq a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

La fórmula en (2) establece que se convierten coordenadas rectangulares a polares en una integral doble escribiendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, usando los límites de integración apropiados para r y θ y reemplazando dA por $r \, dr \, d\theta$. **Tenga cuidado de no olvidar el factor adicional r en el miembro derecho de la fórmula 2.** Un método clásico para recordar esto se muestra en la figura 5, donde el rectángulo polar “infinitesimal” puede concebirse como un rectángulo ordinario con dimensiones $r \, d\theta$ y dr y que por tanto tiene un área $dA = r \, dr \, d\theta$.

☉ **EJEMPLO 1** Evalúe $\iint_R (3x + 4y^2) \, dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN La región R puede describirse como

$$R = \{(x, y) \mid y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Este es el semianillo que se mostró en la figura 1(b), y en coordenadas polares está dado por $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Así, por la fórmula 2,

$$\begin{aligned} \iint_R (3x + 4y^2) \, dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r^2 \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[r^3 \cos \theta + r^4 \sin^2 \theta \right]_{r=1}^{r=2} \, d\theta = \int_0^\pi (7 \cos \theta + 15 \sin^2 \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[7 \cos \theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta) \right] \, d\theta \\ &= 7 \sin \theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4} \sin 2\theta \Big|_0^\pi = \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

Aquí se usa la identidad trigonométrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Véase la sección 7.2 para consejos sobre la integración de funciones trigonométricas.

EJEMPLO 2 Halle el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUCIÓN Si se pone $z = 0$ en la ecuación del paraboloides, se obtiene $x^2 + y^2 = 1$. Esto significa que el plano interseca el paraboloides en el círculo $x^2 + y^2 = 1$, así que el sólido reside bajo el paraboloides y sobre el disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ [véase las figuras 6 y 1(a)]. En coordenadas polares, D está dado por $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Puesto que $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3) \, dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

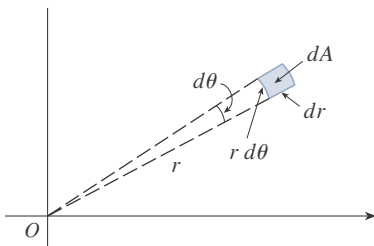


FIGURA 5

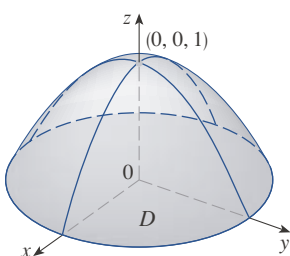


FIGURA 6

Si hubiera usado coordenadas rectangulares en vez de coordenadas polares, habría obtenido

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dA = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx$$

lo cual no es fácil de evaluar porque implica determinar $\int (1 - x^2)^{3/2} dx$. ■

Lo que se ha hecho hasta aquí puede prolongarse al tipo de región, más complicado, que se muestra en la figura 7. Este tipo es similar a las regiones rectangulares tipo II consideradas en la sección 15.2. De hecho, al combinar la fórmula 2 de esta sección con la fórmula 15.2.5, se obtiene la fórmula siguiente.

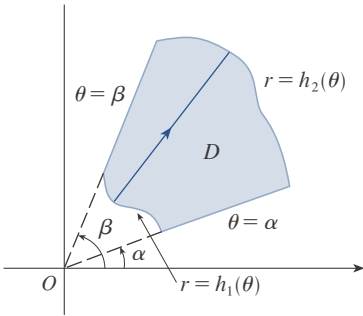


FIGURA 7
 $D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$

3 Si f es continua en una región polar de la forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

En particular, al tomar $f(x, y) = 1, h_1(\theta) = 0$ y $h_2(\theta) = h(\theta)$ en esta fórmula, se ve que el área de la región D acotada por $\theta = \alpha, \theta = \beta,$ y $r = h(\theta)$ es

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1 dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{h(\theta)} r dr d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [h(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

y esto coincide con la fórmula 10.4.3.

EJEMPLO 3 Use una integral doble para encontrar el área encerrada por un lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN En el trazo de la curva en la figura 8 se advierte que un lazo está dado por la región

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 0 \leq r \leq \cos 2\theta\}$$

Así, el área es

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

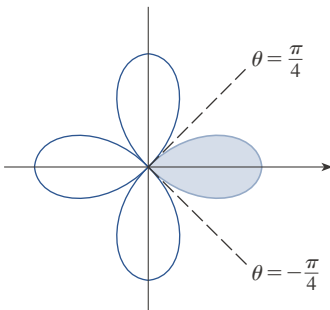


FIGURA 8

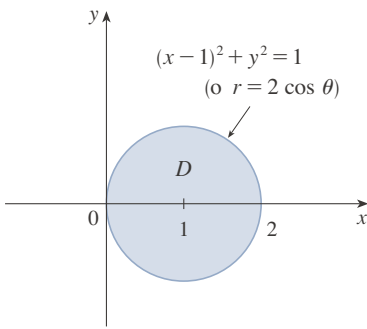


FIGURA 9

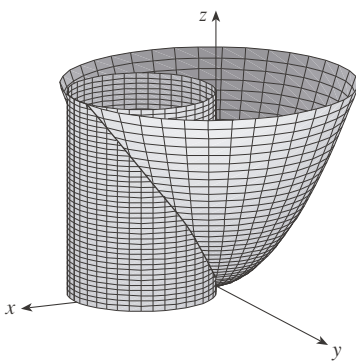


FIGURA 10

EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se encuentra bajo el paraboloido $z = x^2 + y^2$, sobre el plano xy , y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUCIÓN El sólido se tiende arriba del disco D cuyo círculo frontera tiene ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ o, tras completar el cuadrado,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Véase las figuras 9 y 10.)

En coordenadas polares se tiene $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = r \cos \theta$, así que el círculo frontera se convierte en $r^2 = 2r \cos \theta$, o $r = 2 \cos \theta$. De este modo, el disco D está dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta\}$$

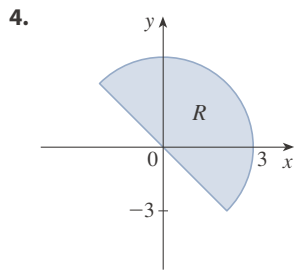
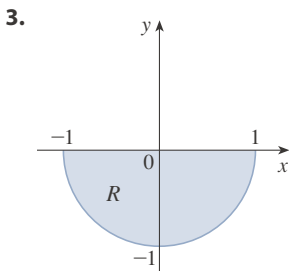
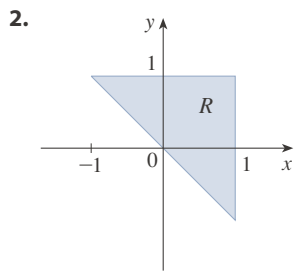
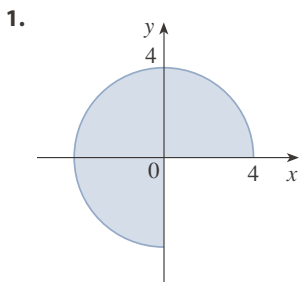
y, por la fórmula 3, se tiene

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = 8 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \right] d\theta \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} \theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} = 2 \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$



15.3 EJERCICIOS

1-4 Se muestra una región R . Decida si usar coordenadas polares o coordenadas rectangulares y escriba $\iint_R f(x, y) dA$ como una integral iterada, donde f es una función continua arbitraria en R .



5-6 Trace la región cuya área está dada por la integral y evalúe la integral.

5. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_1^2 r dr d\theta$

6. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2 \sin \theta} r dr d\theta$

7-14 Evalúe la integral dada cambiando a coordenadas polares.

7. $\iint_D x^2 y dA$, donde D es la mitad superior del disco con centro en el origen y radio 5
8. $\iint_R (2x - y) dA$, donde R es la región en el primer cuadrante encerrada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $x = 0$ y $y = x$
9. $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$, donde R es la región en el primer cuadrante entre los círculos con centro en el origen y radios 1 y 3
10. $\iint_R \frac{y^2}{x^2 + y^2} dA$, donde R es la región que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$ con $0 < a < b$
11. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dA$, donde D es la región acotada por el semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y

12. $\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2

13. $\iint_R \arctan(y/x) dA$, donde
 $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$

14. $\iint_D x dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$

15-18 Use una integral doble para hallar el área de la región.

15. Un lazo de la rosa $r = \cos 3\theta$

16. La región encerrada por los dos cardioides $r = 1 + \cos \theta$ y $r = 1 - \cos \theta$

17. La región dentro del círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$

18. La región dentro del cardiode $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$

19-27 Use coordenadas polares para determinar el volumen del sólido dado.

19. Bajo el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 25$

20. Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y sobre el anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

21. Bajo el plano $2x + y + z = 4$ y sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$

22. Bajo el paraboloides $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y sobre el plano xy

23. Una esfera de radio a

24. Acotado por los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

25. Sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Acotado por los paraboloides $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$

27. Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Un taladro cilíndrico con radio r_1 se usa para perforar un agujero en el centro de una esfera de radio r_2 . Determine el volumen del sólido en forma de anillo que resta.

(b) Exprese el volumen del inciso (a) en términos de la altura h del anillo. Note que el volumen depende solo de h , no de r_1 ni r_2 .

29-32 Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

29. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy dx$

30. $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} (2x + y) dx dy$

31. $\int_0^{1/2} \int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx dy$

32. $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2y dx dy$

33-34 Exprese la integral doble en términos de una integral simple con respecto a r . Use después su calculadora para evaluar la integral con cuatro decimales.

33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2} dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 1

34. $\iint_D xy\sqrt{1+x^2+y^2} dA$, donde D es la porción del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ que está en el primer cuadrante

35. Una piscina es circular con un diámetro de 10 metros. La profundidad es constante a lo largo de las rectas este-oeste y aumenta linealmente de 1 m en el extremo sur a 2 m en el extremo norte. Determine el volumen de agua en la piscina.

36. Un aspersor agrícola distribuye agua en un patrón circular de 50 m de radio. Suministra agua a una profundidad de e^{-r} metros por hora a una distancia de r metros desde el aspersor.

(a) Si $0 < R \leq 50$, ¿cuál es la cantidad total de agua suministrada por hora a la región dentro del círculo de radio R centrado en el aspersor?

(b) Determine una expresión para la cantidad promedio de agua por hora por metro cuadrado suministrada a la región dentro del círculo de radio R .

37. Halle el valor promedio de la función $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ en la región anular $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, donde $0 < a < b$.

38. Sea D el disco con centro en el origen y radio a . ¿Cuál es la distancia promedio de los puntos en D al origen?

39. Use coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$$

en una integral doble. Evalúe después la integral doble.

40. (a) Se define la integral impropia (en la totalidad del plano \mathbb{R}^2)

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dA \end{aligned}$$

donde D_a es el disco con radio a y centro en el origen. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dA = \pi$$

(b) Una definición equivalente de la integral impropia del inciso (a) es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)} dA$$

donde S_a es el cuadrado con vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esto para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \pi$$

(c) Deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{2}$, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

(Este es un resultado fundamental en probabilidad y estadística.)

41. Use el resultado del ejercicio 40, inciso (c), para evaluar las integrales siguientes.

(a) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

(b) $\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$

15.4 Aplicaciones de las integrales dobles

Ya se ha visto una aplicación de las integrales dobles: calcular volúmenes. Otra aplicación geométrica es determinar áreas de superficies, y esto se hará en la sección siguiente. En esta sección se exploran aplicaciones físicas como el cálculo de masa, carga eléctrica, centro de masa y momento de inercia. Se verá que estas ideas físicas también son importantes cuando se aplican a funciones de densidad de probabilidad de dos variables aleatorias.

■ Densidad y masa

En la sección 8.3 fue capaz de usar integrales simples para calcular momentos y el centro de masa de una placa o lámina delgada con densidad constante. Pero ahora, equipado con la integral doble, se puede considerar una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa una región D del plano xy y que su **densidad** (en unidades de masa por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\rho(x, y)$, donde ρ es una función continua en D . Esto significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

donde Δm y ΔA son la masa y el área de un rectángulo pequeño que contiene (x, y) y el límite se toma como las dimensiones del rectángulo cerca de 0. (Véase la figura 1.)

Para determinar la masa total m de la lámina, se divide un rectángulo R que contiene a D en subrectángulos R_{ij} del mismo tamaño (como en la figura 2) y se considera que $\rho(x, y)$ es 0 fuera de D . Si se elige un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} , la masa de la parte de la lámina que ocupa R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$, donde ΔA es el área de R_{ij} . Si se suman todas las masas, se obtiene una aproximación de la masa total:

$$m \approx \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Si ahora se incrementa el número de subrectángulos, se obtiene la masa total m de la lámina como el valor limitante de las aproximaciones:

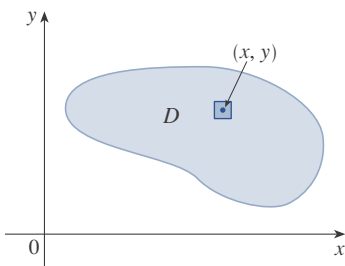


FIGURA 1

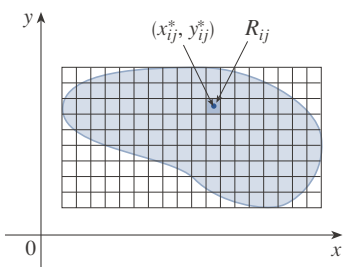


FIGURA 2

1

$$m = \lim_{k, l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D \rho(x, y) dA$$

Los físicos también consideran otros tipos de densidad que pueden tratarse de la misma manera. Por ejemplo, si una carga eléctrica se distribuye en una región D y la densidad de

carga (en unidades de carga por unidad de área) está dada por $\sigma(x, y)$ en un punto (x, y) en D , la carga total Q está dada por

$$\boxed{2} \quad Q = \iint_D \sigma(x, y) \, dA$$

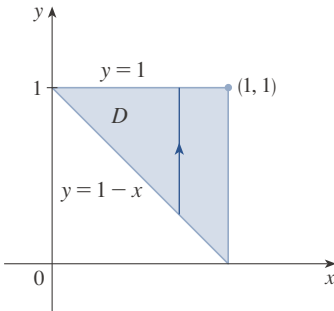


FIGURA 3

EJEMPLO 1 La carga se distribuye en la región triangular D de la figura 3 de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = xy$, medida en coulombs por metro cuadrado (C/m^2). Determine la carga total.

SOLUCIÓN De la ecuación 2 y la figura 3 se tiene

$$\begin{aligned} Q &= \iint_D \sigma(x, y) \, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} [1^2 - (1-x)^2] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Así, la carga total es $\frac{5}{24} C$. ■

■ Momentos y centros de masa

En la sección 8.3 se determinó el centro de masa de una lámina con densidad constante; aquí se considera una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa la región D y tiene función de densidad $\rho(x, y)$. Recuerde que en el capítulo 8 se definió el momento de una partícula alrededor de un eje como el producto de su masa y su distancia dirigida desde el eje. Se dividió D en pequeños rectángulos como en la figura 2. Entonces, la masa de R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$, así que se puede aproximar el momento de R_{ij} con respecto al eje x mediante

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A] y_{ij}^*$$

Si se suman ahora estas cantidades y se toma el límite conforme el número de subrectángulos aumenta, se obtiene el **momento** de la lámina entera **alrededor del eje x** :

$$\boxed{3} \quad M_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y \rho(x, y) \, dA$$

De igual manera, el **momento alrededor del eje y** es

$$\boxed{4} \quad M_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}^* \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x \rho(x, y) \, dA$$

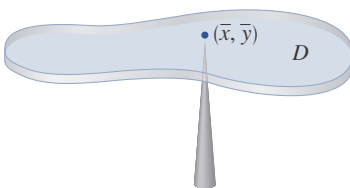


FIGURA 4

Como en el caso anterior, se define el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) de tal modo que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. El significado físico es que la lámina se comporta como si su masa entera se concentrara en su centro de masa. Así, la lámina se balancea horizontalmente cuando es sostenida en su centro de masa (véase la figura 4).

5 Las coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) del centro de masa de la lámina que ocupa la región D y con función de densidad $\rho(x, y)$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dA \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) \, dA$$

donde la masa m está dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dA$$

EJEMPLO 2 Halle la masa y centro de masa de una lámina triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$ si la función de densidad es $\rho(x, y) = 1 + 3y + y$.

SOLUCIÓN El triángulo aparece en la figura 5. (Note que la ecuación de la frontera superior es $y = 2 - 2x$.) La masa de la lámina es

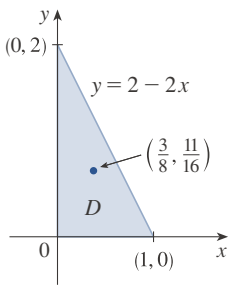


FIGURA 5

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} \, dx \\ &= 4 \int_0^1 (1 - x^2) \, dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Así, las fórmulas en (5) dan

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) \, dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy) \, dy \, dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2y + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3) \, dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8} \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) \, dA = \frac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2) \, dy \, dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} \, dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[7x - 9 \frac{x^2}{2} - x^3 + 5 \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

El centro de masa está en el punto $(\frac{3}{8}, \frac{11}{16})$. ■

EJEMPLO 3 La densidad en cualquier punto en una lámina semicircular es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Encuentre el centro de masa de la lámina.

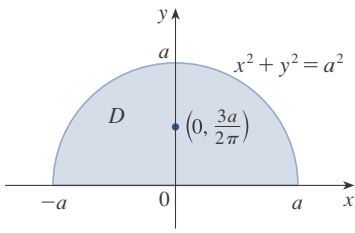


FIGURA 6

SOLUCIÓN Si se concibe la lámina como la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$. (Véase la figura 6.) Entonces, la distancia de un punto (x, y) al centro del círculo (el origen) es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por tanto, la función de densidad es

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

donde K es una constante. Tanto la función de densidad como la forma de la lámina sugieren que se conviertan a coordenadas polares. Entonces, $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ y la región D está dada por $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Así, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) \, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \int_0^\pi \int_0^a (Kr) \, r \, dr \, d\theta = K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2 \, dr \\ &= K\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

Tanto la lámina como la función de densidad son simétricas con respecto al eje y , así que el centro de masa debe estar en el eje y , es decir $\bar{x} = 0$. La coordenada y está dada por

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y) \, dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^\pi \int_0^a r \sin\theta (Kr) \, r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^a r^3 \, dr = \frac{3}{\pi a^3} [-\cos\theta]_0^\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi} \end{aligned}$$

En consecuencia, el centro de masa se localiza en el punto $(0, 3a/(2\pi))$. ■

■ Momento de inercia

El **momento de inercia** (también llamado **segundo momento**) de una partícula de masa m alrededor de un eje se define como mr^2 , donde r es la distancia de la partícula al eje. Se prolongará este concepto a una lámina con función de densidad $\rho(x, y)$ y que ocupa una región D procediendo como lo hizo para los momentos ordinarios. Divida D en pequeños rectángulos, aproxime el momento de inercia de cada subrectángulo alrededor del eje x y tome el límite de la suma cuando el número de subrectángulos aumente. El resultado es el **momento de inercia** de la lámina **alrededor del eje x** :

6

$$I_x = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y) \, dA$$

De igual manera, el **momento de inercia alrededor del eje y** es:

7

$$I_y = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y) \, dA$$

Compare la ubicación del centro de masa del ejemplo 3 con el ejemplo 8.3.4, donde se determinó que el centro de masa de una lámina con la misma forma pero con densidad uniforme se localiza en el punto $(0, 4a/(3\pi))$.

También es de interés considerar el **momento de inercia alrededor del origen**, llamado asimismo **momento polar de inercia**:

$$\boxed{8} \quad I_0 = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA$$

Nótese que $I_0 = I_x + I_y$.

EJEMPLO 4 Encuentre los momentos de inercia I_x , I_y , e I_0 de un disco homogéneo D con densidad $\rho(x, y) = \rho$, centro en el origen y radio a .

SOLUCIÓN La frontera de D es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y en coordenadas polares D es descrita por $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq a$. Calcule primero I_0 :

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 r dr d\theta \\ &= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2} \end{aligned}$$

En vez de calcular I_x e I_y directamente, se usa los hechos de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (de la simetría del problema). Así,

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4} \quad \blacksquare$$

En el ejemplo 4 se advierte que la masa del disco es

$$m = \text{densidad} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$$

así que el momento de inercia del disco alrededor del origen (como una rueda alrededor de su eje) puede escribirse como

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho\pi a^2)a^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

Así, si se aumenta la masa o el radio del disco, se incrementa el momento de inercia. En general, el momento de inercia desempeña casi el mismo papel en el movimiento rotacional que el que desempeña la masa en el movimiento lineal. El momento de inercia de una rueda es lo que dificulta iniciar o detener la rotación de la rueda, así como la masa de un automóvil es lo que dificulta iniciar o detener el movimiento del vehículo.

El **radio de giro de una lámina alrededor de un eje** es el número R , tal que

$$\boxed{9} \quad mR^2 = I$$

donde m es la masa de la lámina e I es el momento de inercia alrededor del eje dado. La ecuación 9 indica que si la masa de la lámina se concentrara en una distancia R desde el eje, el momento de inercia de esta “masa de punto” sería igual al momento de inercia de la lámina.

En particular, el radio de giro \bar{y} con respecto al eje x y el radio de giro \bar{x} con respecto al eje y están dados por las ecuaciones

$$\boxed{10} \quad m\bar{y}^2 = I_x \quad m\bar{x}^2 = I_y$$

Así, (\bar{x}, \bar{y}) es el punto en el que la masa de la lámina puede concentrarse sin cambiar los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas. (Note la analogía con el centro de masa.)

EJEMPLO 5 Determine el radio de giro alrededor del eje x del disco del ejemplo 4.

SOLUCIÓN Como se indicó, la masa del disco es $m = \rho\pi a^2$, así que de las ecuaciones 10 se tiene

$$\bar{y}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Por tanto, el radio de giro alrededor del eje x es $\bar{y} = \frac{1}{2}a$, lo cual es la mitad del radio del disco. ■

■ Probabilidad

En la sección 8.5 se considera la *función de densidad de probabilidad* f de una variable aleatoria continua X . Esto significa que $f(x) \geq 0$ para todas las x , $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$, y la probabilidad de que X se halle entre a y b se determina integrando f de a a b :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Ahora se considera un par de variables aleatorias continuas X y Y , como el período de vida de dos componentes de una máquina o la altura y peso de una mujer adulta elegidos al azar. La **función de densidad conjunta** de X y Y es una función f de dos variables tales que la probabilidad de que (X, Y) esté en una región D es

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dA$$

En particular, si la región es un rectángulo, la probabilidad de que X se ubique entre a y b , y Y se ubique entre c y d es

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

(Véase la figura 7.)

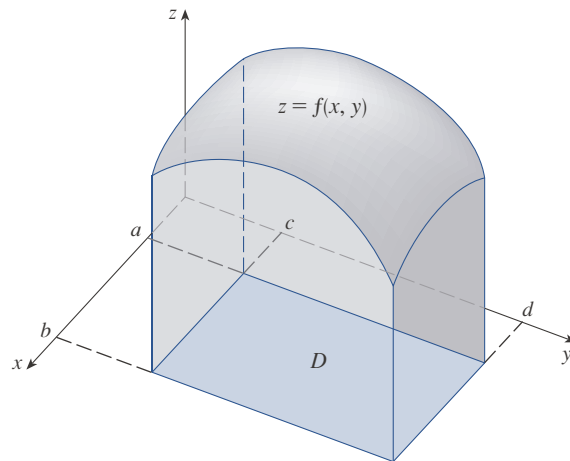


FIGURA 7

La probabilidad de que X se ubique entre a y b , y Y se ubique entre c y d , es el volumen que reside sobre el rectángulo $D = [a, b] \times [c, d]$ y bajo la gráfica de la función de densidad conjunta.

Como las probabilidades no son negativas y se miden en una escala de 0 a 1, la función de densidad conjunta tiene las propiedades siguientes:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dA = 1$$

Al igual que en el ejercicio 15.3.40, la integral doble en \mathbb{R}^2 es una integral impropia definida como el límite de las integrales dobles en círculos o cuadrados en expansión, y se puede escribir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1$$

EJEMPLO 6 Si la función de densidad conjunta para X y Y está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{si } 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

determine el valor de la constante C . Determine después $P(X \leq 7, Y \geq 2)$.

SOLUCIÓN Encuentre el valor de C cerciorándose de que la integral doble de f sea igual a 1. Como $f(x, y) = 0$ fuera del rectángulo $[0, 10] \times [0, 10]$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx &= \int_0^{10} \int_0^{10} C(x + 2y) \, dy \, dx = C \int_0^{10} [xy + y^2]_{y=0}^{y=10} \, dx \\ &= C \int_0^{10} (10x + 100) \, dx = 1500C \end{aligned}$$

Por tanto, $1500C = 1$, así que $C = \frac{1}{1500}$.

Ahora es posible calcular la probabilidad de que X sea a lo sumo de 7 y Y al menos de 2:

$$\begin{aligned} P(X \leq 7, Y \geq 2) &= \int_{-\infty}^7 \int_2^{\infty} f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^7 \int_2^{10} \frac{1}{1500}(x + 2y) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{1500} \int_0^7 [xy + y^2]_{y=2}^{y=10} \, dx = \frac{1}{1500} \int_0^7 (8x + 96) \, dx \\ &= \frac{868}{1500} \approx 0.5787 \end{aligned}$$

Suponga que X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_1(x)$ y Y una variable aleatoria con función de densidad $f_2(y)$. Entonces, X y Y se llaman **variables aleatorias independientes** si su función de densidad conjunta es el producto de sus funciones de densidad particulares:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

En la sección 8.5 se modelaron tiempos de espera usando funciones exponenciales de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

donde μ es la media del tiempo de espera. En el ejemplo siguiente se considerará una situación con dos tiempos de espera independientes.

EJEMPLO 7 El gerente de una sala de cine determina que el tiempo promedio que los cinéfilos esperan en fila para comprar un boleto y ver la película de esta semana es de 10 minutos, y que el tiempo promedio que esperan para comprar palomitas es

de 5 minutos. Suponiendo que los tiempos de espera son independientes, determine la probabilidad de que un cinéfilo espere un total de menos de 20 minutos antes de ocupar su asiento.

SOLUCIÓN Suponiendo que tanto el tiempo de espera X para la compra de boletos como el tiempo de espera Y en la fila de la dulcería son modelados por funciones exponenciales de densidad de probabilidad, se pueden escribir las funciones de densidad particulares como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Puesto que X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Se pide determinar la probabilidad de que $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

donde D es la región triangular que aparece en la figura 8. Así,

$$\begin{aligned} P(X + Y < 20) &= \iint_D f(x, y) \, dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{50} \int_0^{20} \left[e^{-x/10}(-5)e^{-y/5} \right]_{y=0}^{y=20-x} \, dx \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10}(1 - e^{-(x-20)/5}) \, dx \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10}) \, dx \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476 \end{aligned}$$

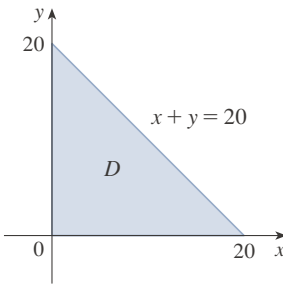


FIGURA 8

Esto significa que aproximadamente 75% de los cinéfilos esperan menos de 20 minutos antes de ocupar su asiento. ■

■ Valores esperados

Recuerde de la sección 8.5 que si X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f , su *media* es

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \, dx$$

Ahora bien, si X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta f , defina la **media de X** y la **media de Y** , también llamadas **valores esperados** de X y Y , como

$$\boxed{11} \quad \mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x, y) \, dA \quad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} yf(x, y) \, dA$$

Observe qué parecidas son las expresiones para μ_1 y μ_2 en (11) los momentos M_x y M_y de una lámina con función de densidad ρ en las ecuaciones 3 y 4. De hecho, se puede concebir la probabilidad como una masa continuamente distribuida. Se calcula la probabilidad como se calculó la masa, integrando una función de densidad. Y como la “masa de probabilidad” total es 1, las expresiones para \bar{x} y \bar{y} en (5) indican que se pueden concebir los valores esperados de X y Y , μ_1 y μ_2 , como las coordenadas del “centro de masa” de la distribución de probabilidad.

En el ejemplo siguiente se tratará con distribuciones normales. Como en la sección 8.5, una variable aleatoria está *normalmente distribuida* si su función de densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde μ es la media y σ la desviación estándar.

EJEMPLO 8 Una fábrica produce cojinetes de rodillos (de forma cilíndrica) que se venden con un diámetro de 4.0 cm y una longitud de 6.0 cm. De hecho, los diámetros X están normalmente distribuidos con una media de 4.0 cm y desviación estándar de 0.01 cm; mientras que las longitudes Y están normalmente distribuidas con una media de 6.0 cm y desviación estándar de 0.01 cm. Suponiendo que X y Y son independientes, escriba la función de densidad conjunta y gráfiquela. Halle la probabilidad de que un cojinete aleatoriamente seleccionado de la línea de producción tenga una longitud o diámetro que difiera de la media en más de 0.02 cm.

SOLUCIÓN Se da que X y Y están normalmente distribuidas con $\mu_1 = 4.0$, $\mu_2 = 6.0$, y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.01$. Así, las funciones de densidad particulares para X y Y son

$$f_1(x) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{0.0002}} \quad f_2(y) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-6)^2}{0.0002}}$$

Como X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x)f_2(y) \\ &= \frac{1}{0.0002\pi} e^{-\frac{(x-4)^2}{0.0002}} e^{-\frac{(y-6)^2}{0.0002}} \\ &= \frac{5000}{\pi} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \end{aligned}$$

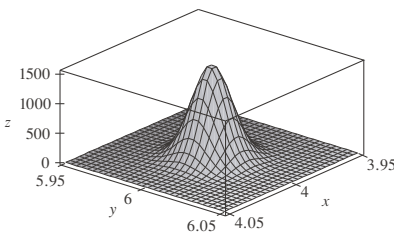


FIGURA 9 Gráfica de la función de densidad conjunta bivariada normal del ejemplo 8

Una gráfica de esta función se presenta en la figura 9.

Calcule primeramente la probabilidad de que tanto X como Y difieran de sus medias en menos de 0.02 cm. Al usar una calculadora o computadora para estimar la integral, se tiene

$$\begin{aligned} P(3.98 < X < 4.02, 5.98 < Y < 6.02) &= \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} f(x, y) \, dy \, dx \\ &= \frac{5000}{\pi} \int_{3.98}^{4.02} \int_{5.98}^{6.02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \, dy \, dx \\ &\approx 0.91 \end{aligned}$$

Entonces, la probabilidad de que X o Y difiera de su media en más de 0.02 cm es de aproximadamente

$$1 - 0.91 = 0.09$$



15.4 EJERCICIOS

- La carga eléctrica se distribuye en el rectángulo $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$ de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Determine la carga total en el rectángulo.
- La carga eléctrica se distribuye en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ de tal forma que la densidad de carga en (x, y) es

$$\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (medida en coulombs por metro cuadrado). Determine la carga total en el disco.}$$

3-10 Halle la masa y centro de masa de la lámina que ocupa la región D y que tiene la función de densidad ρ dada.

3. $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$; $\rho(x, y) = ky^2$

4. D es la región triangular encerrada por las rectas $x = 0$, $y = x$, y $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$
5. D es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$
6. D es la región triangular encerrada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, y $x + 2y = 1$; $\rho(x, y) = x$
7. D está acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 0$; $\rho(x, y) = ky$
8. D está acotada por $y = x + 2$ y $y = x^2$; $\rho(x, y) = kx^2$
9. D está acotada por las curvas $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; $\rho(x, y) = xy$
10. D está encerrada por las curvas $y = 0$, $y = \cos x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; $\rho(x, y) = y$
-
11. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante. Determine su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del eje x .
12. Determine el centro de masa de la lámina del ejercicio 11 si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de su distancia del origen.
13. La frontera de una lámina consta de los semicírculos $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = \sqrt{4 - x^2}$ junto con las porciones del eje x que los unen. Determine el centro de masa de la lámina si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia del origen.
14. Determine el centro de masa de la lámina del ejercicio 13 si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia del origen.
15. Determine el centro de masa de una lámina en forma de un triángulo rectángulo isósceles con lados iguales de longitud a si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto de la hipotenusa.
16. Una lámina ocupa la región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 2y$ pero fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Halle el centro de masa si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia del origen.
17. Halle los momentos de inercia I_x , I_y , I_0 para la lámina del ejercicio 3.
18. Halle los momentos de inercia I_x , I_y , I_0 para la lámina del ejercicio 6.
19. Halle los momentos de inercia I_x , I_y , I_0 para la lámina del ejercicio 15.
20. Considere una aspa de ventilador cuadrada con lados de longitud 2 y la esquina inferior izquierda ubicada en el origen. Si la densidad del aspa es $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, ¿es más difícil rotar el aspa alrededor del eje x o alrededor del eje y ?

21-24 Una lámina con densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa la región dada. Halle los momentos de inercia I_x y I_y y los radios de giro \bar{x} y \bar{y} .

21. El rectángulo $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq h$
22. El triángulo con vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$ y $(0, h)$
23. La parte del disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el primer cuadrante
24. La región bajo la curva $y = \sin x$ de $x = 0$ a $x = \pi$

SAC 25-26 Use un sistema algebraico computacional para determinar la masa, centro de masa y momentos de inercia de la lámina que ocupa la región D y tiene la función de densidad dada.

25. D está encerrada por el lazo derecho de la rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$; $\rho(x, y) = x^2 + y^2$
26. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq xe^{-x}, 0 \leq x \leq 2\}$; $\rho(x, y) = x^2y^2$

27. La función de densidad conjunta para un par de variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- (a) Determine el valor de la constante C .
- (b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
- (c) Determine $P(X + Y \leq 1)$.

28. (a) Verifique que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es una función de densidad conjunta.

- (b) Si X y Y son variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es la función f del inciso (a), halle
- (i) $P(X \geq \frac{1}{2})$ (ii) $P(X \geq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$
- (c) Halle los valores esperados de X y Y .

29. Suponga que X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- (a) Verifique que f es en efecto una función de densidad conjunta.
- (b) Encuentre las probabilidades siguientes.
- (i) $P(Y \geq 1)$ (ii) $P(X \leq 2, Y \leq 4)$
- (c) Encuentre los valores esperados de X y Y .

30. (a) Una lámpara tiene dos focos, cada uno de un tipo con período de vida promedio de 1000 horas. Suponiendo que se puede calcular la probabilidad de falla de un foco mediante una función exponencial de densidad con media $\mu = 1000$, halle la probabilidad de que ambos focos de la lámpara fallen en menos de 1000 horas.
- (b) Otra lámpara tiene un solo foco del mismo tipo que en el inciso (a). Si un foco se funde y es reemplazado por otro del mismo tipo, encuentre la probabilidad de que los dos focos fallen en menos de un total de 1000 horas.

- SAC 31.** Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes, donde X está normalmente distribuida con una media de 45 y la desviación estándar de 0.5, y Y está normalmente distribuida con una media de 20 y desviación estándar de 0.1.
- Determine $P(40 \leq X \leq 50, 20 \leq Y \leq 25)$.
 - Determine $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leq 2)$.
- 32.** Xavier y Yolanda tienen clases que terminan al mediodía y convienen en reunirse todos los días después de clases. Llegan a la cafetería en forma independiente. La hora de llegada de Xavier es X y la hora de llegada de Yolanda es Y , donde X y Y se miden en minutos después del mediodía. Las funciones de densidad particulares son

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{si } 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(Xavier llega un poco después de mediodía y es más probable que llegue a tiempo que tarde. Yolanda siempre llega a las 12:10 de la tarde y es más probable que llegue tarde que a tiempo.) Después de su llegada, Yolanda espera a Xavier hasta media hora, pero él no la esperará. Determine la probabilidad de que se encuentren.

- 33.** Cuando se estudia la propagación de una epidemia, se supone que la probabilidad de que un individuo contagiado propague la enfermedad a otro individuo no contagiado es una función de distancia entre ellos. Considere una ciudad circular con 10 km de radio, donde la población está uniformemente distribuida. Para un individuo no contagiado en un punto fijo $A(x_0, y_0)$, suponga que la función de probabilidad está dada por

$$f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

donde $d(P, A)$ denota la distancia entre los puntos P y A .

- Suponga que la exposición de una persona a la enfermedad es la suma de las probabilidades de contraer la enfermedad por parte de todos los miembros de la población. Suponga que las personas contagiadas están uniformemente distribuidas en la ciudad, con k individuos contagiados por kilómetro cuadrado. Halle una integral doble que represente la exposición de una persona residente en A .
- Evalúe la integral para el caso en el que A es el centro de la ciudad y para el caso en que A se localiza en el extremo de la ciudad. ¿Dónde preferiría vivir usted?

15.5 Área de una superficie

En la sección 16.6 se tratará con áreas de superficies más generales, llamadas superficies paramétricas, así que esta sección no necesita ser cubierta si se cubre aquella.

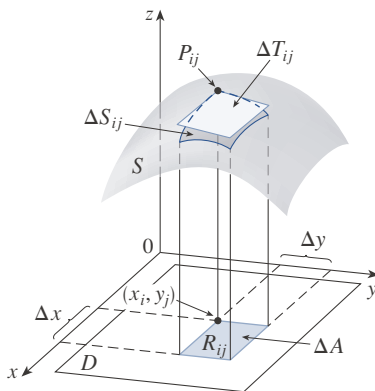


FIGURA 1

En esta sección se aplican las integrales dobles al problema de calcular el área de una superficie. En la sección 8.2 se determinó el área de un tipo muy especial de superficie (una superficie de revolución) por los métodos del cálculo de una variable. Aquí se calculará el área de una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, la gráfica de una función de dos variables.

Sea S una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, donde f tiene derivadas parciales continuas. Para mayor facilidad en la derivación de la fórmula del área de superficie, se supondrá que $f(x, y) \geq 0$ y el dominio D de f es un rectángulo. Se divide D en pequeños rectángulos R_{ij} con área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Si (x_i, y_i) es la esquina de R_{ij} más cercana al origen, sea $P_{ij}(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ el punto en S directamente arriba de él (véase la figura 1). El plano tangente a S en P_{ij} es una aproximación de S cerca de P_{ij} . Así, el área ΔT_{ij} de la parte de este plano tangente (un paralelogramo) que se halla directamente arriba de R_{ij} es una aproximación del área ΔS_{ij} de la parte de S que se halla directamente arriba de R_{ij} . De este modo, la suma $\sum \sum \Delta T_{ij}$ es una aproximación del área total de S , y esta aproximación parece mejorar conforme aumenta el número de rectángulos. En consecuencia, se define el **área de superficie** de S como

1

$$A(S) = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij}$$

Para determinar una fórmula más conveniente que la ecuación 1 con fines de cálculo, sean \mathbf{a} y \mathbf{b} los vectores que parten de P_{ij} y se tienden a lo largo de los lados del paralelogramo con área ΔT_{ij} . (Véase la figura 2.) Entonces, $\Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Recuerde de la sección 14.3 que $f_x(x_i, y_i)$ y $f_y(x_i, y_i)$ son las pendientes de las rectas tangentes que pasan por P_{ij} en las direcciones de \mathbf{a} y \mathbf{b} . Por tanto,

$$\mathbf{a} = \Delta x \mathbf{i} + f_x(x_i, y_j) \Delta x \mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = \Delta y \mathbf{j} + f_y(x_i, y_j) \Delta y \mathbf{k}$$

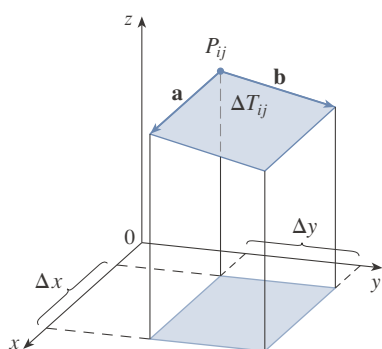


FIGURA 2

y

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & f_x(x_i, y_j) \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y(x_i, y_j) \Delta y \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \mathbf{i} - f_y(x_i, y_j) \Delta x \Delta y \mathbf{j} + \Delta x \Delta y \mathbf{k} \\ &= [-f_x(x_i, y_j) \mathbf{i} - f_y(x_i, y_j) \mathbf{j} + \mathbf{k}] \Delta A \end{aligned}$$

$$\text{Así,} \quad \Delta T_{ij} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A$$

De la definición 1 se tiene entonces

$$\begin{aligned} A(S) &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta T_{ij} \\ &= \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sqrt{[f_x(x_i, y_j)]^2 + [f_y(x_i, y_j)]^2 + 1} \Delta A \end{aligned}$$

y por la definición de una integral doble se obtiene la fórmula siguiente.

2 El área de la superficie con ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde f_x y f_y son continuas, es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1} dA$$

En la sección 16.6 se verificará que esta fórmula es congruente con la fórmula previa para el área de una superficie de revolución. Si se usa la notación alternativa para derivadas parciales, es posible reescribir la fórmula 2 como sigue:

3

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Nótese la semejanza entre la fórmula de área de superficie en la ecuación 3 y la fórmula de longitud de arco de la sección 8.1:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la superficie $z = x^2 + 2y$ que se encuentra sobre la región triangular T en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

SOLUCIÓN La región T aparece en la figura 3 y está descrita por

$$T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

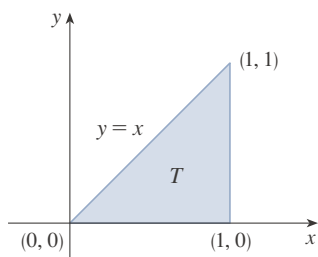


FIGURA 3

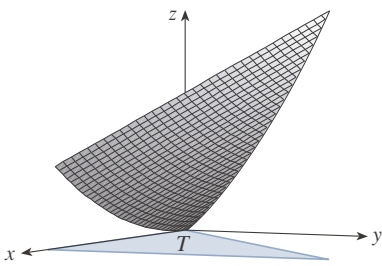


FIGURA 4

Usando la fórmula 2 con $f(x, y) = x^2 + 2y$ se obtiene

$$A = \iint_T \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1} \, dA = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5} \, dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3}(4x^2 + 5)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5})$$

La figura 4 muestra la porción de la superficie cuya área se acaba de calcular. ■

EJEMPLO 2 Halle el área del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra bajo el plano $z = 9$.

SOLUCIÓN El plano interseca el paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 9, z = 9$. Así, la superficie dada se encuentra sobre el disco D con centro en el origen y radio 3. (Véase la figura 5.) Usando la fórmula 5 se tiene

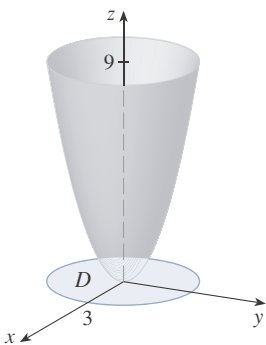


FIGURA 5

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} \, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dA$$

Al convertir a coordenadas polares se obtiene

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{1}{8} \sqrt{1 + 4r^2} \, (8r) \, dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{8}\right) \frac{2}{3} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{\pi}{6} (37\sqrt{37} - 1)$$

■

15.5 EJERCICIOS

1-12 Determine el área de la superficie.

1. La parte del plano $5x + 3y - z + 6 = 0$ que está sobre el rectángulo $[1, 4] \times [2, 6]$
2. La parte del plano $6x + 4y + 2z = 1$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 25$
3. La parte del plano $3x + 2y - z = 6$ que está en el primer octante
4. La parte de la superficie $2y + 4z - x^2 = 5$ que está sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(2, 4)$
5. La parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano $z = -2$
6. La parte del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que está sobre el cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$
7. La parte del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está sobre el rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 2)$ y $(4, 2)$
8. La parte de la superficie $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está sobre el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, 1)$

9. La parte de la superficie $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

10. La parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy

11. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y sobre el plano xy

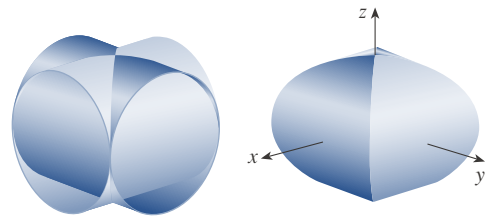
12. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro del paraboloide $z = x^2 + y^2$

13-14 Determine el área de la superficie con cuatro decimales expresando el área en términos de una integral simple y usando su calculadora para estimar la integral.

13. La parte de la superficie $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$

14. La parte de la superficie $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

15. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles (véase la sección 15.1) con cuatro cuadrados para estimar la porción del área de la superficie del paraboloides $z = x^2 + y^2$ que está sobre el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
- SAC** (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área de superficie del inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).
16. (a) Use la regla del punto medio para integrales dobles con $m = n = 2$ para estimar el área de la superficie $z = xy + x^2 + y^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.
- SAC** (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar el área de superficie del inciso (a) con cuatro decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).
- SAC** 17. Determine el área exacta de la superficie $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2, 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1$.
- SAC** 18. Determine el área exacta de la superficie $z = 1 + x + y + x^2 \quad -2 \leq x \leq 1 \quad -1 \leq y \leq 1$. Ilustre graficando la superficie.
- SAC** 19. Determine con cuatro decimales el área de la parte de la superficie $z = 1 + x^2y^2$ que está sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 1$.
- SAC** 20. Determine con cuatro decimales el área de la parte de la superficie $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está sobre el cuadrado $|x| + |y| \leq 1$. Ilustre graficando esta parte de la superficie.
21. Demuestre que el área de la parte del plano $z = ax + by + c$ que se proyecta en la región D en el plano xy con área $A(D)$ es $\sqrt{a^2 + b^2 + 1} A(D)$.
22. Si usted intenta usar la fórmula 2 para hallar el área de la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, tiene un pequeño problema, porque la integral doble es impropia. De hecho, el integrando tiene una discontinuidad infinita en cada punto del círculo frontera $x^2 + y^2 = a^2$. Sin embargo, la integral puede calcularse como el límite de la integral en el disco $x^2 + y^2 \leq t^2$ cuando $t \rightarrow a^-$. Use este método para demostrar que el área de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.
23. Determine el área de la parte finita del paraboloides $y = x^2 + z^2$ cortado por el plano $y = 25$. [Sugerencia: proyecte la superficie en el plano xz .]
24. La figura muestra la superficie creada cuando el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ interseca el cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Determine el área de esta superficie.



15.6 Integrales triples

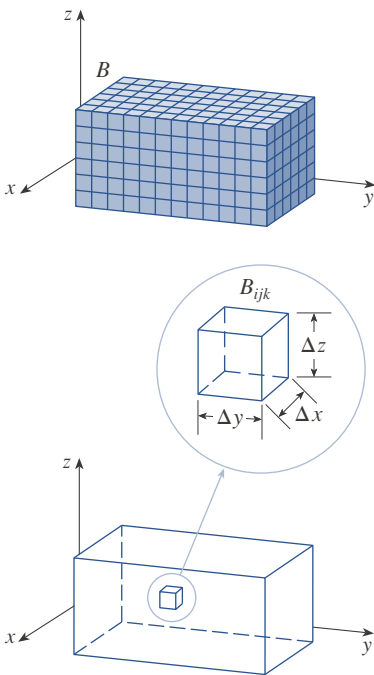


FIGURA 1

Así como se definieron las integrales simples para funciones de una variable y las integrales dobles para funciones de dos variables, se pueden definir integrales triples para funciones de tres variables. Se tratará primero el caso más simple, en el que f es definida en una caja rectangular:

$$1 \quad B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

El primer paso es dividir B en subcajas. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual ancho Δx , dividiendo $[c, d]$ en m subintervalos de ancho Δy y dividiendo $[r, s]$ en n subintervalos de ancho Δz . Los planos que pasan por los puntos extremos de estos subintervalos paralelos a los planos de coordenadas dividen la caja B en lmn subcajas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

que aparecen en la figura 1. Cada subcaja tiene volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Luego se forma el **triple suma de Riemann**

$$2 \quad \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

donde el punto muestra $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está en B_{ijk} . Por analogía con la definición de la integral doble (15.1.5), se define la integral triple como el límite de las triples sumas de Riemann en (2).

3 Definición La integral triple de f en la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V$$

si este límite existe.

Otra vez, la integral triple siempre existe si f es continua. Se puede elegir como punto muestra cualquier punto en la subcaja, pero si se escoge el punto (x_i, y_j, z_k) se obtiene una expresión de apariencia más simple para la integral triple:

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V$$

Lo mismo que en el caso de las integrales dobles, el método práctico para evaluar las integrales triples es expresarlas como integrales iteradas, de esta manera.

4 Teorema de Fubini para integrales triples Si f es continua en la caja rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

La integral iterada del miembro derecho del teorema de Fubini significa que primero se integra con respecto a x (manteniendo fijas a y y z), luego se integra con respecto a y (manteniendo fija z) y finalmente se integra con respecto a z . Hay otros cinco órdenes posibles en que se puede integrar, todos los cuales dan el mismo valor. Por ejemplo, si se integra con respecto a y , luego a z y después a x , se tiene

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

EJEMPLO 1 Evalúe la integral triple $\iiint_B xyz^2 \, dV$, donde B es la caja rectangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

SOLUCIÓN Se podría usar cualesquiera de los seis posibles órdenes de integración. Si se decide integrar con respecto a x , luego a y , y después a z , se obtiene

$$\begin{aligned} \iiint_B xyz^2 \, dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 y z^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \, dz \\ &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} \, dy \, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz \\ &= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} \, dz = \left[\frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$



Ahora se define la **integral triple en una región acotada general E** en el espacio tridimensional (un sólido) siguiendo casi el mismo procedimiento que se usó para las integrales dobles (15.2.2). Se encierra E en una caja B del tipo dado por la ecuación 1. Luego se define F de tal forma que coincida con f en E , aunque sea 0 para puntos en B fuera de E . Por definición,

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iiint_B F(x, y, z) \, dV$$

Esta integral existe si f es continua y la frontera de E es “razonablemente suave”. La integral triple tiene en esencia las mismas propiedades que la integral doble (propiedades 6-9 de la sección 15.2).

Se restringe la atención a funciones continuas f y a ciertos tipos simples de regiones. Se dice que una región sólida E es de **tipo 1** si se sitúa entre las gráficas de dos funciones continuas de x y y , es decir

$$5 \quad E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy , como se muestra en la figura 2. Note que la frontera superior del sólido E es la superficie con ecuación $z = u_2(x, y)$, mientras que la frontera inferior es la superficie $z = u_1(x, y)$.

Por el mismo tipo de argumento que llevó a (15.2.3), se puede demostrar que si E es una región tipo 1 dada por la ecuación 5, entonces

$$6 \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA$$

El significado de la integral interior en el miembro derecho de la ecuación 6 es que x y y se mantienen fijas, y por tanto $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ se consideran constantes, mientras que $f(x, y, z)$ se integra con respecto a z .

En particular, si la proyección D de E en el plano xy es una región plana tipo 1 (como en la figura 3), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se convierte en

$$7 \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

Si por otro lado, D es una región plana tipo II (como en la figura 4), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y), u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se convierte en

$$8 \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$$

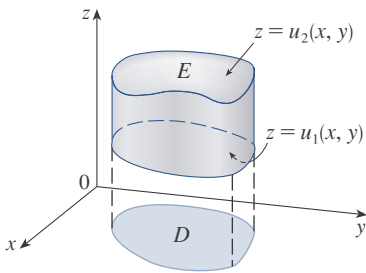


FIGURA 2
Región sólida tipo 1

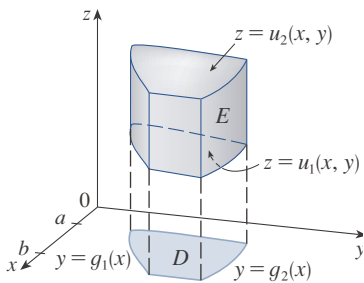


FIGURA 3
Región sólida tipo 1 donde la proyección D es una región plana tipo 1

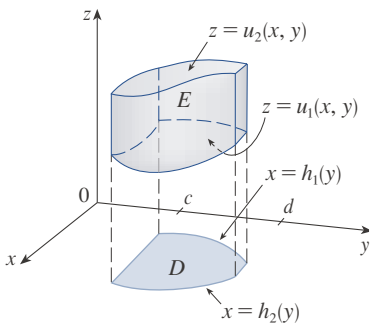


FIGURA 4
Región sólida tipo 1 con una proyección tipo II

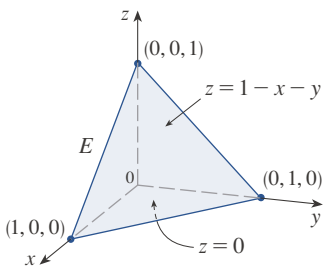


FIGURA 5

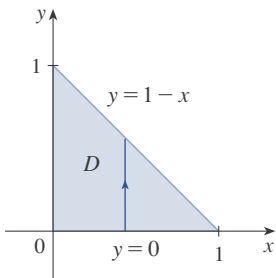


FIGURA 6

EJEMPLO 2 Evalúe $\iiint_E z \, dV$, donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

SOLUCIÓN Cuando se establece una integral triple, es prudente dibujar dos diagramas: uno de la región sólida E (véase la figura 5) y otro de su proyección D en el plano xy (véase la figura 6). La frontera inferior del tetraedro es el plano $z = 0$ y la frontera superior es el plano $x + y + z = 1$ (o $z = 1 - x - y$), así que se usa $u_1(x, y) = 0$ y $u_2(x, y) = 1 - x - y$ en la fórmula 7. Observe que los planos $x + y + z = 1$ y $z = 0$ intersecan en la recta $x + y = 1$ (o $y = 1 - x$) en el plano xy . Así, la proyección de E es la región triangular que aparece en la figura 6, y se tiene

$$\boxed{9} \quad E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

Esta descripción de E como región tipo 1 permite evaluar la integral como sigue:

$$\begin{aligned} \iiint_E z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Una región sólida E es de **tipo 2** si es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D, u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}$$

Donde, esta vez, D es la proyección de E en el plano yz (véase la figura 7). La superficie posterior es $x = u_1(y, z)$, la superficie anterior es $x = u_2(y, z)$ y se tiene

$$\boxed{10} \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) \, dx \right] dA$$

Por último, una región **tipo 3** es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D, u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xz , $y = u_1(x, z)$ es la superficie izquierda y $y = u_2(x, z)$ es la superficie derecha (véase la figura 8). Para este tipo de región se tiene

$$\boxed{11} \quad \iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) \, dy \right] dA$$

En cada una de las ecuaciones 10 y 11 hay dos posibles expresiones para la integral, dependiendo de si D es una región plana tipo I o tipo II (en correspondencia con las ecuaciones 7 y 8).

EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV$, donde E es la región acotada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$.

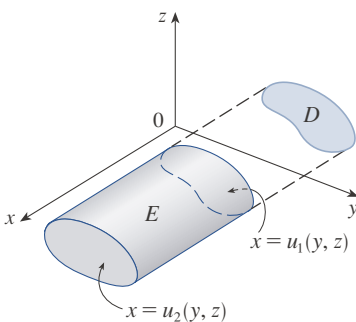


FIGURA 7
Región tipo 2

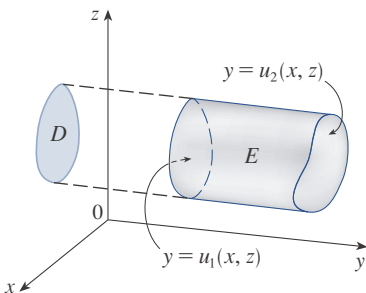


FIGURA 8
Región tipo 3

TEC Visual 15.6 ilustra cómo regiones sólidas (incluida la de la figura 9) se proyectan en planos de coordenadas.

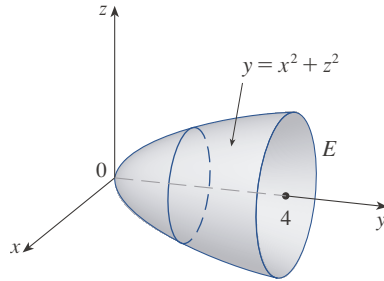


FIGURA 9
Región de integración

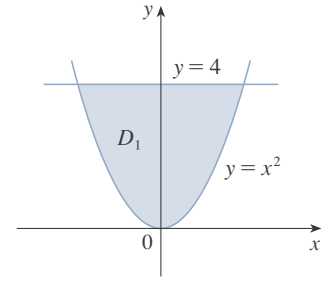


FIGURA 10
Proyección en el plano xy

De $y = x^2 + z^2$ se obtiene $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, así que la superficie frontera inferior de E es $z = -\sqrt{y - x^2}$ y la superficie superior es $z = \sqrt{y - x^2}$. Por tanto, la descripción de E como región tipo 1 es

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, -\sqrt{y - x^2} \leq z \leq \sqrt{y - x^2}\}$$

y se obtiene

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Aunque esta expresión es correcta, es extremadamente difícil de evaluar. Así, se considera en su lugar a E como región tipo 3. En este caso, su proyección D_3 en el plano xz es el disco $x^2 + z^2 \leq 4$ que aparece en la figura 11.

Entonces la frontera izquierda de E es el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y la frontera derecha es el plano $y = 4$, así que si se toma $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ y $u_2(x, z) = 4$ en la ecuación 11 se tiene

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} \, dy \right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dA$$

Aunque esta integral podría escribirse como

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dz \, dx$$

es más fácil convertir a coordenadas polares en el plano xz : $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$. Esto da

$$\begin{aligned} \iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4) \, dr \\ &= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \right]_0^2 = \frac{128\pi}{15} \end{aligned}$$

FIGURA 11
Proyección en el plano xz

El paso más difícil para evaluar una integral triple es establecer una expresión para la región de integración (como la ecuación 9 del ejemplo 2). Recuerde que los límites de integración en la integral interior contienen a lo sumo dos variables, los límites de integración en la integral intermedia contienen a lo sumo una variable y los límites de integración en la integral exterior deben ser constantes.



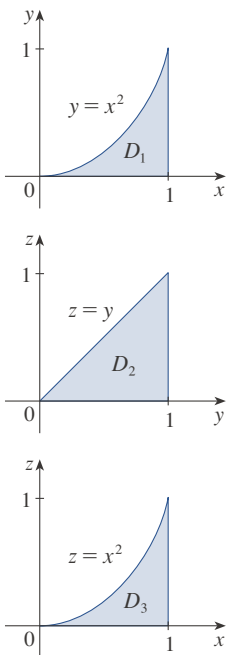


FIGURA 12
Proyecciones de E

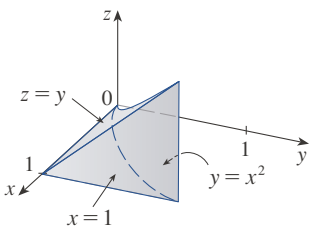


FIGURA 13
El sólido E

EJEMPLO 4 Exprese la integral iterada $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$ como una integral triple y después reescríbala como integral iterada en un orden diferente, integrando primero con respecto a x , luego a z y después a y .

SOLUCIÓN Se puede escribir

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_E f(x, y, z) dV$$

donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq z \leq y\}$. Esta descripción de E nos permite escribir proyecciones en los tres planos de coordenadas, como sigue:

$$\begin{aligned} \text{en el plano } xy: \quad D_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\text{en el plano } yz: \quad D_2 = \{(y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y\}$$

$$\text{en el plano } xz: \quad D_3 = \{(x, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x^2\}$$

De los trazos resultantes de las proyecciones en la figura 12 se obtiene el sólido E de la figura 13. Se ve que este es el sólido encerrado por los planos $z = 0$, $x = 1$, $y = z$, y el cilindro parabólico $y = x^2$ (o $x = \sqrt{y}$).

Si se integra primero con respecto a x , luego a z y después a y , se usa una descripción alterna de E :

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq y, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$$

Así,

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y, z) dx dz dy$$

■ Aplicaciones de integrales triples

Recuerde que si $f(x) \geq 0$, la integral simple $\int_a^b f(x) dx$ representa el área bajo la curva, $y = f(x)$ de a a b , y si $f(x, y) \geq 0$, la integral doble $\iint_D f(x, y) dA$ representa el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre D . La correspondiente interpretación de la integral triple $\iiint_E f(x, y, z) dV$, donde $f(x, y, z) \geq 0$, no es muy útil, porque sería el “hipervolumen” de un objeto tetradimensional y, desde luego, eso es muy difícil de visualizar. (Recuerde que E es solo el *dominio* de la función f ; la gráfica de f reside en el espacio tetradimensional.) No obstante, la integral triple $\iiint_E f(x, y, z) dV$ puede interpretarse de diferentes maneras en diversas situaciones físicas, dependiendo de las interpretaciones físicas de x , y , z y $f(x, y, z)$.

Comience con el caso especial en el que $f(x, y, z) = 1$ para todos los puntos en E . La integral triple representa entonces el volumen de E :

12

$$V(E) = \iiint_E dV$$

Por ejemplo, esto puede verse en el caso de una región tipo 1 poniendo $f(x, y, z) = 1$ en la fórmula 6:

$$\iiint_E 1 dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz \right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)] dA$$

y por la sección 15.2 se sabe que esto representa el volumen que se encuentra entre las superficies $z = u_1(x, y)$ y $z = u_2(x, y)$.

EJEMPLO 5 Use una integral triple para determinar el volumen del tetraedro T acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $y = 0$.

SOLUCIÓN El tetraedro T y su proyección D en el plano xy aparecen en las figuras 14 y 15, respectivamente. La frontera inferior de T es el plano $z = 0$ y la frontera superior es el plano $x + 2y + z = 2$, es decir $z = 2 - x - 2y$.

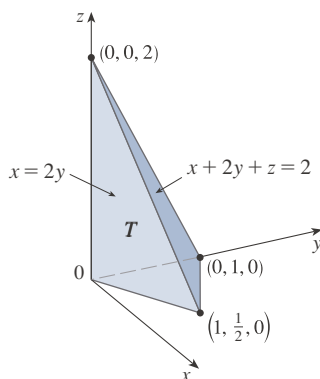


FIGURA 14

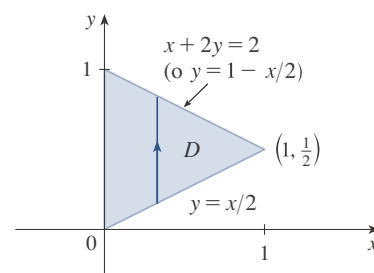


FIGURA 15

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y) \, dy \, dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

por el mismo cálculo del ejemplo 15.2.4.

(Adviértase que no es necesario usar integrales triples para calcular volúmenes. Simplemente ofrecen un método alternativo para establecer el cálculo.) ■

Todas las aplicaciones de las integrales dobles de la sección 15.4 pueden prolongarse inmediatamente a las integrales triples. Por ejemplo, si la función de densidad de un objeto sólido que ocupa la región E es $\rho(x, y, z)$, en unidades de masa por unidad de volumen, en cualquier punto dado (x, y, z) , entonces su **masa** es

$$\boxed{13} \quad m = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dV$$

y sus **momentos** alrededor de los tres planos de coordenadas son

$$\boxed{14} \quad \begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x \rho(x, y, z) \, dV & M_{xz} &= \iiint_E y \rho(x, y, z) \, dV \\ M_{xy} &= \iiint_E z \rho(x, y, z) \, dV \end{aligned}$$

El **centro de masa** se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\boxed{15} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Si la densidad es constante, el centro de masa del sólido se llama **centroide** de E . Los **momentos de inercia** alrededor de los tres ejes de coordenadas son

$$\boxed{16} \quad I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV \quad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dV$$

Como en la sección 15.4, la **carga eléctrica** total en un objeto sólido que ocupa una región E y con densidad de carga $\sigma(x, y, z)$ es

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z) \, dV$$

Si se tienen tres variables aleatorias continuas X, Y y Z , su **función de densidad conjunta** es una función de tres variables tal que la probabilidad de que (X, Y, Z) resida en E es

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z) \, dV$$

En particular,

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d, r \leq Z \leq s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

La función de densidad conjunta satisface

$$f(x, y, z) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx = 1$$

EJEMPLO 6 Halle el centro de masa de un sólido de densidad constante acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z, z = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN El sólido E y su proyección en el plano xy aparecen en la figura 16. Las superficies inferior y superior de E son los planos $z = 0$ y $z = x$, así que se describe E como una región tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x\}$$

Entonces, si la densidad es $\rho(x, y, z) = \rho$, la masa es

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x \rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 (1 - y^4) \, dy = \rho \int_0^1 (1 - y^4) \, dy \\ &= \rho \left[y - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{5} \end{aligned}$$

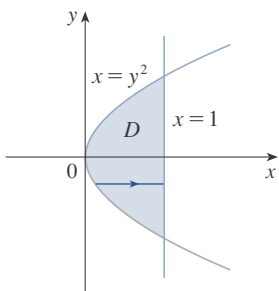
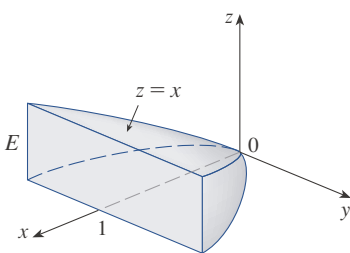


FIGURA 16

Debido a la simetría de E y ρ respecto al plano xz , se puede decir de inmediato que $M_{xz} = 0$, y por tanto $\bar{y} = 0$. Los otros momentos son

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x x\rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 \, dx \, dy = \rho \int_{-1}^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=y^2}^{x=1} dy \\ &= \frac{2\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{3} \left[y - \frac{y^7}{7} \right]_0^1 = \frac{4\rho}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x z\rho \, dz \, dx \, dy \\ &= \rho \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^2 \, dx \, dy \\ &= \frac{\rho}{3} \int_0^1 (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{7} \end{aligned}$$

En consecuencia, el centro de masa es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14} \right)$$

15.6 EJERCICIOS

1. Evalúe la integral del ejemplo 1 integrando primero con respecto a y , luego a z y después a x .
2. Evalúe la integral $\iiint_E (xz - y^3) \, dV$, donde $E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ usando tres diferentes órdenes de integración.

3-8 Evalúe la integral iterada.

3. $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) \, dx \, dy \, dz$
4. $\int_0^1 \int_y^{2y} \int_0^{x+y} 6xy \, dz \, dx \, dy$
5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z) \, dz \, dx \, dy$
6. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \sin y \, dy \, dz \, dx$
7. $\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} z \sin x \, dy \, dz \, dx$
8. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z \, dz \, dy \, dx$

9-18 Evalúe la integral triple.

9. $\iiint_E y \, dV$, donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, x - y \leq z \leq x + y\}$
10. $\iiint_E e^{z/y} \, dV$, donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$
11. $\iiint_E 2x \, dV$, donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$
12. $\iiint_E xy \, dV$, donde E está acotado por los cilindros parabólicos $y = x^2$ y $x = y^2$ y los planos $z = 0$ y $z = x + y$
13. $\iiint_E 6xy \, dV$, donde E reside bajo el plano $z = 1 + x + y$, y sobre la región en el plano xy acotada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, y $x = 1$
14. $\iiint_E (x - y) \, dV$, donde E está encerrado por las superficies $z = x^2 - 1$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$, y $y = 2$
15. $\iiint_T y^2 \, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$

16. $\iiint_T xz \, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(0, 0, 1)$

17. $\iiint_E x \, dV$, donde E está acotado por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$

18. $\iiint_E z \, dV$, donde E está acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante

19-22 Use una integral triple para hallar el volumen del sólido dado.

19. El tetraedro encerrado por los planos de coordenadas y el plano $2x + y + z = 4$

20. El sólido encerrado por los paraboloides $y = x^2 + z^2$ y $y = 8 - x^2 + z^2$

21. El sólido encerrado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 1$

22. El sólido encerrado por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y los planos $y = -1$, $y + z = 4$

23. (a) Exprese el volumen de la cuña en el primer octante cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ por los planos $y = x$ y $x = 1$ como una integral triple.

SAC (b) Use la tabla de integrales (en las páginas de referencia 6-10) o un sistema algebraico computacional para determinar el valor exacto de la integral triple del inciso (a).

24. (a) En la **regla del punto medio para integrales triples** se usa una triple suma de Riemann para aproximar una integral triple en una caja B , donde $f(x, y, z)$ se evalúa en el centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ de la caja B_{ijk} . Use la regla del punto medio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$, donde B es el cubo definido por $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$. Divida B en ocho cubos de igual tamaño.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar la integral del inciso (a) al entero más cercano. Compare con la respuesta del inciso (a).

25-26 Use la regla del punto medio para integrales triples (ejercicio 24) para estimar el valor de la integral. Divida B en ocho subcajas de igual tamaño.

25. $\iiint_B \cos(xyz) \, dV$, donde $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$

26. $\iiint_B \sqrt{x} e^{xyz} \, dV$, donde $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$

27-28 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy \, dz \, dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx \, dz \, dy$

29-32 Exprese la integral $\iiint_E f(x, y, z) \, dV$ como una integral iterada de seis maneras diferentes, donde E es el sólido acotado por las superficies dadas.

29. $y = 4 - x^2 - 4z^2$, $y = 0$

30. $y^2 + z^2 = 9$, $x = -2$, $x = 2$

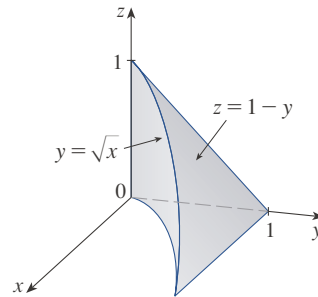
31. $y = x^2$, $z = 0$, $y + 2z = 4$

32. $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$, $x + y - 2z = 2$

33. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

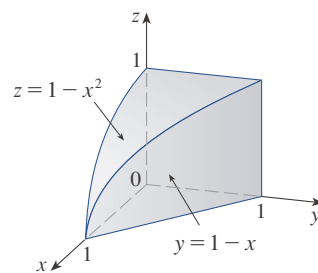
Reescriba esta integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



34. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z) \, dy \, dz \, dx$$

Reescriba esta integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



35-36 Escriba otras cinco integrales iteradas iguales a la integral iterada dada.

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy$

36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy$

37-38 Evalúe la integral triple usando solo interpretación geométrica y simetría.

37. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2) dV$, donde C es la región cilíndrica $x^2 + y^2 \leq 4$, $-2 \leq z \leq 2$

38. $\iiint_B (z^3 + \sen y + 3) dV$, donde B es la pelota unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

39-42 Determine la masa y el centro de masa del sólido E con la función de densidad ρ dada.

39. E se encuentra sobre el plano xy y bajo el paraboloido $z = 1 - x^2 - y^2$; $\rho(x, y, z) = 3$

40. E está acotado por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + z = 1$, $x = 0$ y $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

41. E es el cubo dado por $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

42. E es el tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

43-46 Suponga que el sólido tiene densidad constante k

43. Determine los momentos de inercia para un cubo cuyos lados miden L si un vértice se localiza en el origen y tres aristas se tienden a lo largo de los ejes de coordenadas.

44. Determine los momentos de inercia para un ladrillo rectangular con dimensiones a , b y c , y masa M si el centro del ladrillo está situado en el origen y las aristas son paralelas a los ejes de coordenadas.

45. Determine el momento de inercia alrededor del eje z del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$.

46. Determine el momento de inercia alrededor del eje z del cono sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$.

47-48 Establezca, pero no evalúe, expresiones integrales para (a) la masa, (b) el centro de masa y (c) el momento de inercia alrededor del eje z .

47. El sólido del ejercicio 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

48. El hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

SAC 49. Sea E el sólido en el primer octante acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use un sistema algebraico computacional para hallar los valores exactos de las cantidades para E siguientes.

- (a) La masa
- (b) El centro de masa
- (c) El momento de inercia alrededor del eje z

SAC 50. Si E es el sólido del ejercicio 18 con función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine las cantidades siguientes, con tres decimales.

- (a) La masa
- (b) El centro de masa
- (c) El momento de inercia alrededor del eje z

51. La función de densidad conjunta para las variables aleatorias X , Y y Z es $f(x, y, z) = Cxyz$ si $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$, y $f(x, y, z) = 0$, en caso contrario.

- (a) Determine el valor de la constante C .
- (b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.
- (c) Determine $P(X + Y + Z \leq 1)$.

52. Suponga que X , Y y Z son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0.5x+0.2y+0.1z)}$ si $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, y $f(x, y, z) = 0$, en caso contrario.

- (a) Determine el valor de la constante C .
- (b) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1)$.
- (c) Determine $P(X \leq 1, Y \leq 1, Z \leq 1)$.

53-54 El valor promedio de una función $f(x, y, z)$ en una región sólida E se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z) dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E . Por ejemplo, si ρ es una función de densidad, entonces ρ_{prom} es la densidad promedio de E .

53. Halle el valor promedio de la función $f(x, y, z) = xyz$ en el cubo con longitud de lados L que reside en el primer octante con un vértice en el origen y aristas paralelas a los ejes de coordenadas.

54. Halle la altura promedio de los puntos en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$

55. (a) Encuentre la región E para la integral triple

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2) dV$$

es un máximo.

SAC (b) Use un sistema algebraico computacional para calcular el valor máximo exacto de la integral triple del inciso (a).