Matemática 2 - módulo II | **Universidad de la República**
Curso 2020 | **Facultad de Ciencias**
Centro de Matemática

Nombre:
C.I.:

Segundo examen parcial

8 de diciembre

Turno matutino

22 1. Se considera la función de dos variables $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

- 11 *a)* Calcular todos los puntos estacionarios de f y determinar si son mínimos relativos, máximos relativos o puntos silla.
- 11 *b)* Hallar los extremos absolutos de f en el triángulo de vértices $(0,0),\ (0,2),\ (1,0)$.

23 2. Se considera la función $f(x,y) = \frac{y}{x}$ definida para $x \neq 0$.

- 7 *a)* Calcular la integral de f en el rectángulo $[1,2] \times [0,1]$.
- 8 *b)* Representar gráficamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$Q_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 - x^2 \leq y \leq 1 + x,\ 1 \leq x \leq 2\}.$$

y

$$Q_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \qquad y \leq x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

- 8 *c)* Calcular la integral de f en Q_1 y Q_2. (*En el caso de Q_2 se sugiere cambiar a polares y se recuerda que* $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

15 3. Se sabe que una cierta cantidad y depende de otra, x, en la forma $y = ax + b$ siendo a y b ciertas constantes. Se tienen los siguientes datos de mediciones para x e y:

x	y
1	13
2	10
3	11
4	8

- 10 *a)* Determinar los coeficientes a y b para tener la mejor aproximación de y en función de x con el método de los mínimos cuadrados.
- 5 *b)* Estimar el valor de y para $x = 5$.

Tabla de primitivas	
$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^{\alpha},\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^{x}	e^{x}
$\log x$	$x \log x - x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$-\log\lvert\cos x\rvert$

Solución.

Ejercicio 1. $f(x,y) = xy(1-x-y)$

a) f está definida en todo $\mathbb{R}^2$. Los puntos estacionarios son aquellos para los cuales $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(y(1-2x-y), x(1-x-2y) \right)$$

Para que el gradiente se anule debe cumplirse

$$\begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases}$$

Si $\boxed{y=0} \Rightarrow x=0 \ \text{ o } \ x=1.$

Si $\boxed{x=0} \Rightarrow y=0 \ \text{ o } \ y=1$

Si $xy \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ 1-x-2y=0 \end{cases}$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$-x+y=0 \Rightarrow y=x$$

Sustituyendo en la primera nos queda

$$1-3x=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\text{Puntos estacionarios: } (0,0), (1,0), (0,1), \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)}$$

La Hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Evaluamos en los puntos estacionarios:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \det < 0 \to \boxed{(0,0) \text{ es punto silla}}$$

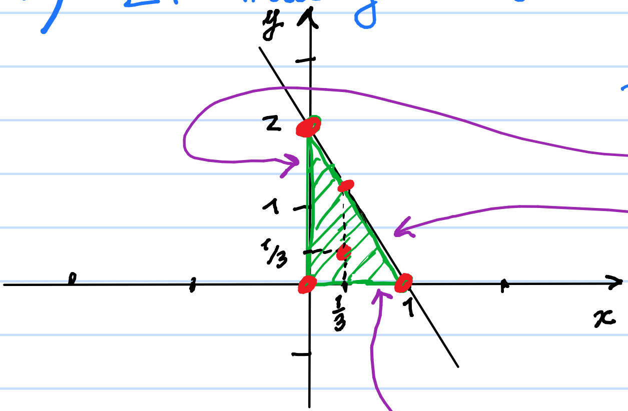
$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \to \det < 0 \to \boxed{(1,0) \text{ es punto silla}}$$

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \det < 0 \to \boxed{(0,1) \text{ es punto silla}}$$

$$Hf\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \to \det > 0,\ a_{11} < 0$$

$$\to \boxed{f \text{ tiene un máximo relativo en } \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)}$$

b) El triángulo de vértices $(0,0), (0,2), (1,0)$ es



Borde:
- $\{(0,y) : 0 \le y \le 2\}$
- $\{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$
- $\{(x, 2-2x) : 0 \le x \le 1\}$

El punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ es el único crítico en el interior. Está en el interior porque ambas coordenadas son positivas y $2 - 2\frac{1}{3} = \frac{4}{3} > \frac{1}{3}$ lo cual indica que el punto está por "debajo" de la recta $y = 2-2x$.

Estudiamos f en el borde :

- $f(0,y) = f(x,0) = 0$
- $f(x, 2-2x) = 2x(1-x)(1-x-2+2x) = -2x(1-x)^2$

derivando esta expresión obtenemos

$$-2(1-x)^2 + 4x(1-x) = 2(1-x)(3x-1)$$

que se anula en $x=1$ y en $x=\frac{1}{3}$. Para $x=1$ estamos en uno de los vértices, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ está en el borde y no es vértice.

<u>Puntos críticos</u>: Interior $\longrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \longrightarrow f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

Borde :

$$\left.\begin{array}{lll} (0,0) & \longrightarrow & f(0,0) = 0 \\ (0,2) & \longrightarrow & f(0,2) = 0 \\ (1,0) & \longrightarrow & f(1,0) = 0 \end{array}\right\} \text{vértices}$$

$$\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right) \longrightarrow f\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right) = -\frac{8}{27} \longrightarrow \text{lado}$$

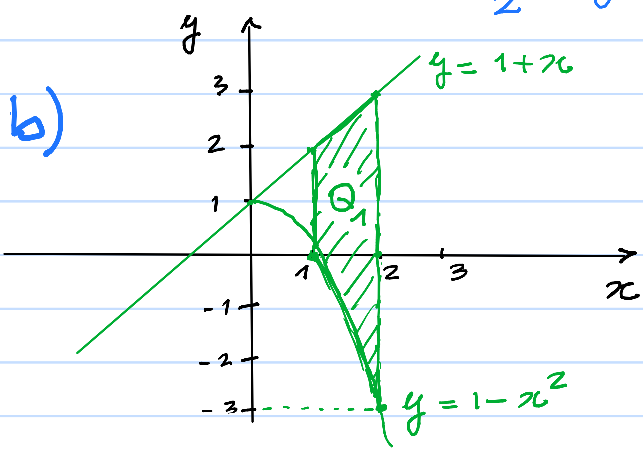
$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Máximo absoluto} = \frac{1}{9}}$, $\boxed{\text{mínimo absoluto} = -\frac{8}{27}}$

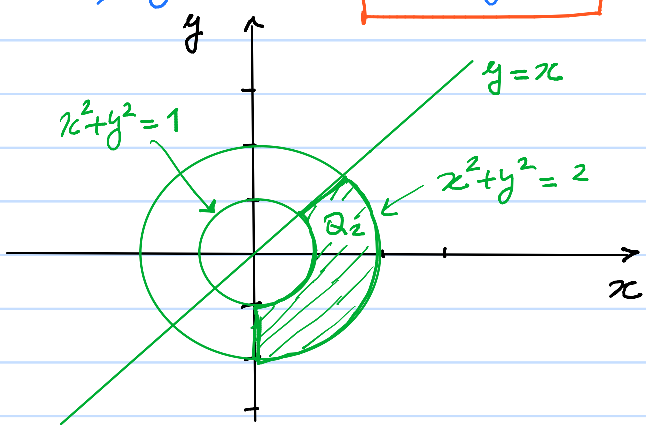
<u>Ejercicio 2.</u> $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$

a)
$$\int_1^2 dx \int_0^1 \frac{y}{x}\, dy = \int_1^2 \left.\frac{y^2}{2x}\right|_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}\log|x|\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\underbrace{\cancel{\log 1}}_{=0} = \boxed{\frac{1}{2}\log 2}$$

b)





c) $$\int_{Q_1} \frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_1^2 dx \int_{1-x^2}^{1+x} \frac{y}{x}\,dy = \int_1^2 \frac{(1+x)^2-(1-x^2)^2}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cancel{1}+2x+x^2-\cancel{1}+2x^2-x^4}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2+3x-x^3\,dx = \boxed{\frac{11}{8}}$$

$$\int_{Q_2} \frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r\,tg\,\theta\,dr = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/4} tg\,\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\log|\cos\theta|\Big|_{-\pi/2}^{\pi/4}$$

$$= -\frac{1}{2}\log|\underbrace{\cos\pi/4}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}| + \boxed{\frac{1}{2}\log|\underbrace{\cos -\pi/2}_{=0}|}$$

Hubo una errata en la letra, faltó la desigualdad $0 \le y$ en Q_2.

Esta integral queda $-\infty$.

La idea era poner

$Q_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ 0\le y \le x,\ 1\le x^2+y^2\le 2\}$

La integral en ese caso es

$$\int_{Q_2} \frac{y}{x}\,dx\,dy = -\frac{1}{2}\log|\overbrace{\cos\tfrac{\pi}{4}}^{=1/\sqrt{2}}| + \frac{1}{2}\log|\underbrace{\overbrace{\cos 0}^{=1}|}_{=0}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\log 2}$$

Ejercicio 3. a) $n = 4$

$\Sigma x_i^2 = 1+4+9+16 = 30$

$\Sigma x_i y_i = 13+20+33+32 = 98$

$\Sigma x_i = 1+2+3+4 = 10$

$\Sigma y_i = 13+10+11+8 = 42$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 30a + 10b = 98 \\ 10a + 4b = 42 \end{array} \xrightarrow{\times 1/2} \left\{ \begin{array}{l} 15a+5b=49 \\ 5a+2b=21 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{7}{5},\ b = 14}$$

b) $y \approx -\frac{7}{5}x + 14 \Rightarrow x = 5,\ \boxed{y \approx 7}$