Matemática 2 - módulo II
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Nombre:
C.I.:

Segundo examen parcial

8 de diciembre

Turno vespertino

22 1. Se considera la función de dos variables $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$.

   11 *a*) Calcular todos los puntos estacionarios de f y determinar si son mínimos relativos, máximos relativos o puntos silla.

   11 *b*) Hallar los extremos absolutos de f en el cuadrado de vértices $(-1, -1),\ (-1, 1),\ (1, 1),\ (1, -1)$.

23 2. Se considera la función $f(x, y) = \frac{y}{x}$ definida para $x \neq 0$.

   7 *a*) Calcular la integral de f en el rectángulo $[2, 4] \times [1, 2]$.

   8 *b*) Representar gráficamente los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 - x \leq y \leq 1 + x^2,\ 1 \leq x \leq 2\}.$$

   y

$$Q_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x \geq 0,\ 0 \geq y \geq -x,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

   8 *c*) Calcular la integral de f en Q_1 y Q_2. (*En el caso de* Q_2 *se sugiere cambiar a polares y se recuerda que* $\cos(\frac{7\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

15 3. Se sabe que una cierta cantidad y depende de otra, x, en la forma $y = ax + b$ siendo a y b ciertas constantes. Se tienen los siguientes datos de mediciones para x e y:

x	y
0	10
1	11
2	8
3	6

   10 *a*) Determinar los coeficientes a y b para tener la mejor aproximación de y en función de x con el método de los mínimos cuadrados.

   5 *b*) Estimar el valor de y para $x = 4$.

Tabla de primitivas	
$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\log x$	$x\log x - x$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$-\log\lvert\cos x\rvert$

Ejercicio 1. $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

a) $\nabla f(x,y) = (6xy - 12x,\ 3y^2 + 3x^2 - 12y)$

Puntos estacionarios:

$$\begin{cases} 6xy - 12x = 0 \\ 3y^2 + 3x^2 - 12y = 0 \end{cases}$$

Si $\boxed{x=0} \rightarrow 3y^2 - 12y = 0 \rightarrow 3y(y-4) = 0 \rightarrow \boxed{y=0},\ \boxed{y=4}$

Si $x \neq 0 \rightarrow y - 2 = 0 \rightarrow \boxed{y=2}$

$\rightarrow 3\,2^2 + 3x^2 - 12.2 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

Entonces, los puntos estacionarios son

$$\boxed{(0,0),\ (0,4),\ (2,2),\ (-2,2)}$$

Para clasificarlos calculamos la Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6y-12 & 6x \\ 6x & 6y-12 \end{pmatrix}$$

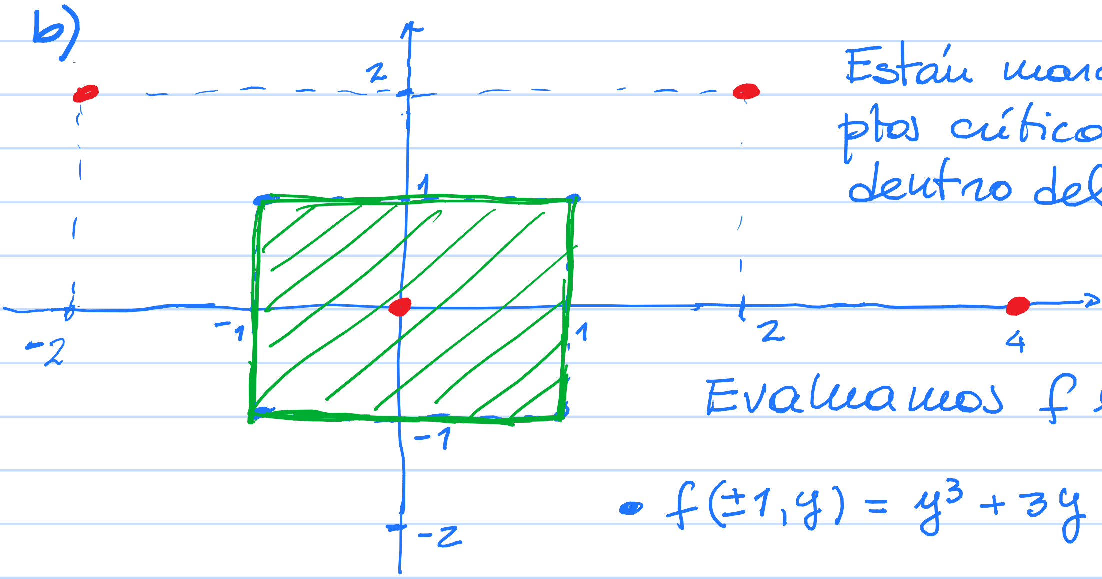
Evaluamos en los puntos estacionarios:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{máximo relativo en } (0,0)}.$$

$$Hf(0,4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{mínimo relativo en } (0,4)}.$$

$$Hf(\pm 2,2) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 12 \\ \pm 12 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{puntos silla en } (\pm 2,2)}$$

b)



Están marcados en rojo los ptos críticos. Hay uno dentro del cuadrado.

Evaluamos f en los lados:

- $f(\pm 1, y) = y^3 + 3y - 6y^2 - 4$

derivamos $\longrightarrow 3y^2 - 12y + 3$

$y^2 - 4y + 1 = 0 \longrightarrow \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} \longrightarrow 2 \pm 2\sqrt{3} = 2(1 \pm \sqrt{3})$

$1 + \sqrt{3} > 2 \quad , \quad -\frac{1}{2} > 1 - \sqrt{3} \longrightarrow -1 > 2(1-\sqrt{3})$

$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} (\pm 1, 2(1+\sqrt{3})) \\ (\pm 1, 2(1-\sqrt{3})) \end{array}\right] \longleftarrow$ No están en el cuadrado

- $f(x, 1) = -3x^2 - 3 \longrightarrow -6x = 0 \longrightarrow \underline{x = 0}$
- $f(x, -1) = -9x^2 - 5 \longrightarrow -18x = 0$

Críticos en el borde : vértices, $(0, \pm 1)$, $(0,0)$

$f(\pm 1, 1) = -6 \quad , \quad f(\pm 1, -1) = -14$

$f(0, 1) = -3 \quad , \quad f(0, -1) = -5$

$f(0,0) = 2$

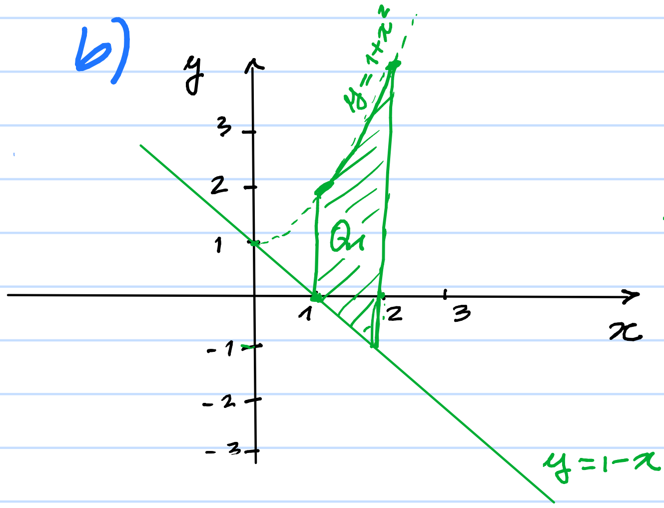
$\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{Máximo absoluto} = 2 \\ \text{mínimo absoluto} = -14 \end{array}}$

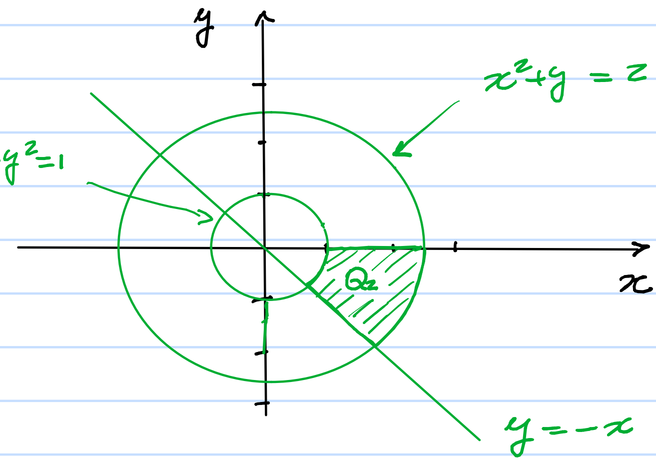
Ejercicio 2.

a) $$\int_2^4 dx \int_1^2 \frac{y}{x}\, dy = \int_2^4 \left.\frac{y^2}{2x}\right|_1^2 dy = \frac{3}{2}\int_2^4 \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{3}{2}\log|x|\Big|_2^4 = \boxed{\frac{3}{2}\log 2}$$

b)





c) $$\int_{Q_1} \frac{y}{x}\, dx dy = \int_1^2 dx \int_{1-x}^{1+x^2} \frac{y}{x}\, dy = \int_1^2 \left.\frac{y^2}{2x}\right|_{1-x}^{1+x^2} dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(1+x^2)^2-(1-x)^2}{x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cancel{1}+2x^2+x^4-\cancel{1}+2x-x^2}{x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 2+x+x^3\, dx = \frac{1}{2}\left(2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \boxed{\frac{29}{8}}$$

$$\int_{Q_2} \frac{y}{x}\, dx dy = \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \frac{\cancel{r}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{r}\cos\theta}\, r\, d\theta = \int_1^{\sqrt{2}} r\, dr \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \mathrm{tg}\,\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|\cos\theta|\Big|_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} = \overbrace{\cancel{-\frac{1}{2}\log|\underbrace{\cos 2\pi}_{=1}|}}^{=0} + \frac{1}{2}\log|\underbrace{\cos\frac{7\pi}{4}}_{=1/\sqrt{2}}|$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4}\log 2}$$

Ejercicio 3.

a) $n = 4$

$$\sum x_i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14$$
$$\sum x_i y_i = 0 + 11 + 16 + 18 = 45$$
$$\sum x_i = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$
$$\sum y_i = 10 + 11 + 8 + 6 = 35$$

$$\begin{cases} 14a + 6b = 45 \\ 6a + 4b = 35 \end{cases} \sim \begin{cases} 8a + 2b = 10 \\ 6a + 4b = 35 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 16a + 4b = 20 \\ 6a + 4b = 35 \end{cases} \sim \begin{cases} 16a + 4b = 20 \\ 10a = -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -1{,}5 \quad , \quad b = 11}$$

b) $y = ax + b \approx -1{,}5x + 11$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Para } x = 4 \quad y \approx -1{,}5 \times 4 + 11 = 5}$$