Matemática 2 - módulo II
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

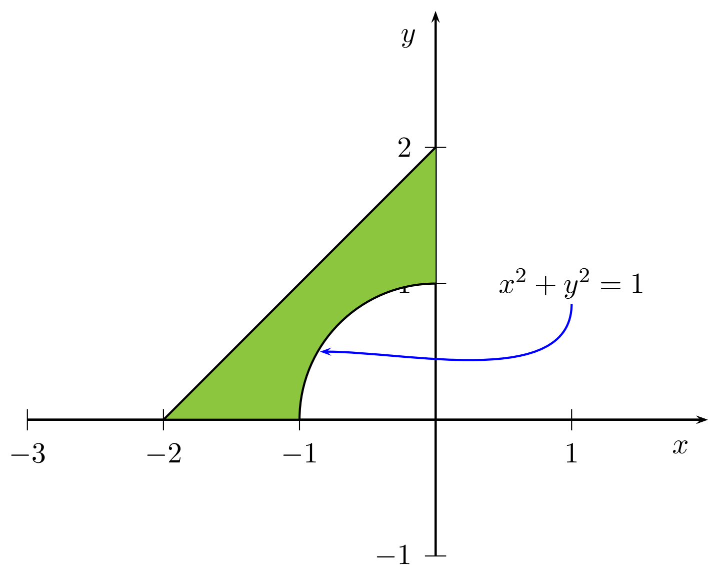
4 de agosto de 2021

(20) 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = x - \tfrac{1}{2}y + \log(\sqrt{x^2+y^2}).$$

(10) *a*) Calcular los puntos críticos de f y clasificarlos.

(10) *b*) Determinar máximo y mínimo absolutos de f en la región de la figura



(20) 2. Calcular la integral

$$\int_D x\cos(x+y)\,dxdy,$$

siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$ y (π,π).

Solución

1. *a*) El gradiente de f es

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}, \frac{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y}{x^2+y^2} \right).$$

El gradiente se anula si

$$\begin{cases} x^2+y^2+x=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2y = x \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases},$$

sustituyendo $x=-2y$ en la segunda ecuación nos queda $y(5y-2)=0$, como $(0,0)$ no está en el dominio de la función el único punto crítico será entonces $\boxed{(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})}$.

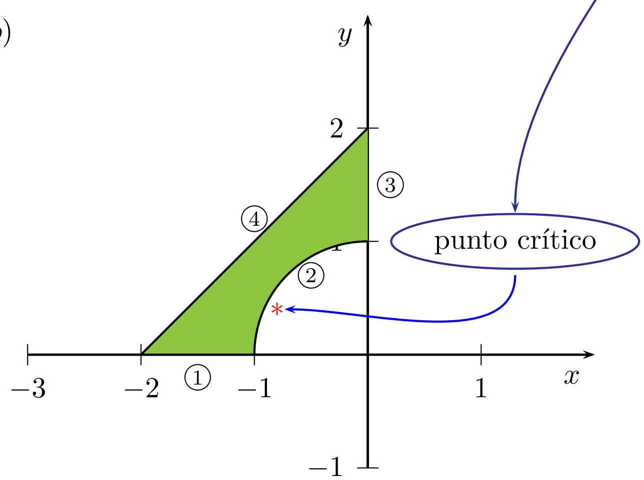
La hessiana de f es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$Hf(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene un punto silla en } (-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5})}$$

b)



Borde:

① $y=0,\ -2 \le x \le -1\ f(x,0) = x + \log|x|$

$$f(x,0)' = 1 + \frac{1}{x}$$

se anula sólo en $x=-1$.

② $x^2+y^2=1,\ -1 \le x \le 0,$
$f(x, \sqrt{1-x^2}) = x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$.

$$f(x,\sqrt{1-x^2})' = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

se anula en $x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, debe ser entonces $\boxed{x = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}}$.

③ $x=0,\ 0 \le y \le 2,\ f(0,y) = -\frac{1}{2}y + \log|y|$.

$$f(0,y)' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{y}$$

se anula sólo en $y=2$.

④ $y-x=2,\ -2\le x\le 0,\ f(x,2+x)=\frac{1}{2}x-1+\log\sqrt{2x^2+4x+4}$.

$$f(x,2+x)'=\frac{1}{2}+\frac{x+1}{x^2+2x+2}=\frac{x^2+4x+4}{2(x^2+2x+2)}$$

la única raíz es $x=-2$.
Interior: $(-\frac{4}{5})^2+(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{5}<1$ entonces el punto donde se anula el gradiente no está en el interior.
Candidatos: $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$.
Evaluamos en los candidatos:
$f(-2,0)=-2+\log 2\approx -1{,}3$, $\quad f(-1,0)=-1$, $\quad f(0,1)=-0{,}5$, $\quad f(0,2)=-1+\log 2\approx -0,3$, $f(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})=-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx -1,1$
Por lo tanto

$$\boxed{\text{máximo}=-1+\log 2}\ \boxed{\text{mínimo}=-2+\log 2}$$

2.

$$\int_D x\cos(x+y)\,dxdy=\int_0^\pi dx\int_0^x x\cos(x+y)\,dy=\int_0^\pi x(\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x)dx=$$
$$=x(-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi -\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\,dx=$$
$$=-\frac{3\pi}{2}-\cancelto{=0}{\left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}x\right)\Big|_0^\pi}=\boxed{-\frac{3\pi}{2}}$$