Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 2

Examen. *03/08/2022*

El examen dura dos horas. El mínimo para aprobar es de 50 puntos.

1. (**60 puntos**)
   Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right)$.

   a) Calcular las derivadas parciales de f.

   b) Hallar los puntos estacionarios de f.

   c) Clasificar los puntos estacionarios.

   d) Hallar los extremos absolutos de f en el triángulo T limitado por las rectas $x = 1$, $y = 0$ e $y = x$.

2. (**40 puntos**)

   a) Dibujar la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \frac{y^2}{4} < 1, \ x > 0, \ y > 0\}$.

   b) Calcular $\iint_D y \, dxdy$.

Nota: *en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. *a)* $f_x(x,y) = \frac{2x-2}{x^2+y^2-2x+2}$ $f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2-2x+2}$

   b) El único punto estacionario es $(1,0)$.

   c) Las derivadas segundas son

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2\left(-x^2+y^2+2x\right)}{\left(x^2+y^2-2x+2\right)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{-4(x-1)y}{\left(x^2+y^2-2x+2\right)^2},$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{2\left(x^2-y^2-2x+2\right)}{\left(x^2+y^2-2x+2\right)^2}.$$

   La matriz hessiana de f en $(1,0)$ es $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, luego f tiene un mínimo relativo en $(1,0)$.

   d) Los vértices de T son $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$. El punto estacionario $(1,0)$ está en un vértice de T. Restringiendo a los lados de T obtenemos

   - $x=1$: $\alpha(y) = f(1,y) = \log\left(y^2+1\right)$, $\alpha'(y) = \frac{2y}{y^2+1}$; $\alpha'(y) = 0 \Rightarrow y = 0$. Esto nos da el punto $(1,0)$.
   - $y=0$: $\beta(x) = f(x,0) = \log\left(x^2-2x+2\right)$, $\beta'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$; $\beta'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$. Esto nos da el punto $(1,0)$.
   - $y=x$: $\gamma(x) = f(x,x) = \log\left(2x^2-2x+2\right)$, $\gamma'(x) = \frac{4x-2}{x^2-2x+2}$; $\gamma'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/2$. Esto nos da el punto $(1/2,1/2)$.

   Luego tenemos que evaluar f en los 4 candidatos anteriores

$$f(0,0) = \log(2); \quad f(1,0) = 0; \quad f(1,1) = \log(2); \quad f(1/2,1/2) = \log(3/2).$$

   Luego el mínimo absoluto es 0 y lo alcanza en $(1,0)$ y el máximo absoluto es $\log(2)$ y lo alcanza en $(0,0)$ y en $(1,1)$.

2. *a)*

   b)

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^1 dx \left(\int_0^{2\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right) = \int_0^1 \left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{2\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 2\int_0^1 1 - x^2\,dx = 2\left.\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1$$
$$= \frac{4}{3}.$$