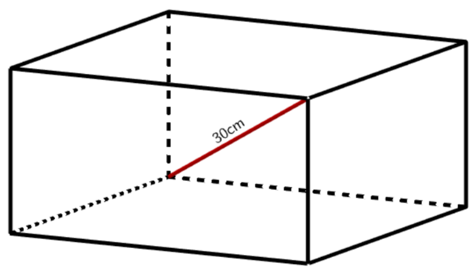
**Matemática 2 - módulo II**
**Curso 2020**

**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

# Examen

*21 de diciembre*

50 1. Se quiere construir una caja rectangular del máximo volumen posible, de manera que la diagonal tenga 30 $cm$.

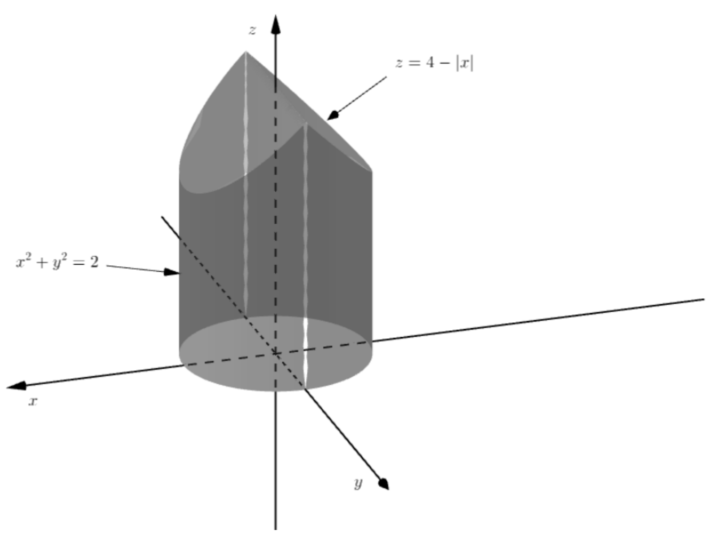



10 $a)$ Justificar por qué existe un volumen máximo en estas condiciones.

15 $b)$ Escribir uno de los lados de la caja en función de los otros dos.

25 $c)$ Determinar las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo.

50 2. Hallar el volumen encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2$ entre el plano horizontal $z = 0$ y el gráfico de la función $f(x, y) = 4 - |x|$.



**Solución**

1. *a*) Si llamamos $x$, $y$, $z$ a los tres lados de la caja (largo, ancho y altura), el volumen es $V = xyz$. Los lados no pueden ser mayores que la longitud de la diagonal por lo cual tanto $x$, como $y$, como $z$ son menores o iguales a 30 (medidos en centímetros). Así que el volumen es una función acotada (además es continua en un conjunto cerrado y acotado) y por Weierstrass tiene máximo y mínimo.

   *b*) La longitud de la diagonal es $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y como debe ser igual a 30 debemos tener

$$z = \sqrt{900 - x^2 - y^2}.$$

   *c*) El volumen es

$$V = xyz = xy\sqrt{900 - x^2 - y^2}.$$

   Hay que maximizar $V$ en el sector $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 30\}$. En el borde del sector $V$ es nulo por lo cual su máximo se alcanza en el interior, así que debemos ver dónde se anula el gradiente. Ahora bien,

$$\nabla V = \left( \frac{y(900 - x^2 - y^2) - x^2 y}{\sqrt{900 - x^2 - y^2}}, \frac{x(900 - x^2 - y^2) - xy^2}{\sqrt{900 - x^2 - y^2}} \right)$$

   se anula si

$$\begin{cases} 900 - x^2 - y^2 - x^2 = 0 \\ 900 - x^2 - y^2 - y^2 = 0, \end{cases}$$

   (ya que $xy \neq 0$). Por lo tanto debe ser $\boxed{x = y = 10\sqrt{3}}$, de donde también $\boxed{z = 10\sqrt{3}}$ (usando la fórmula hallada en *b*). Como hay un único punto estacionario en ese punto es donde se alcanza el máximo.

2. Hay que integrar la función $f(x, y) = 4 - |x|$ en el disco $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} 4 - |x|\, dx = 2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} 4 - x\, dy,$$

ya que podemos dividir el volumen en dos partes iguales, una con $x \geq 0$, y la otra con $x \leq 0$. Cambiando a coordenadas polares obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} 4 - x\, dy &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - r\cos\theta) r dr = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 4\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\theta \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 4 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\theta\, d\theta = 4\pi - \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el volumen pedido es $\boxed{8\pi - \frac{8\sqrt{2}}{3}}$.