Matemática 2 - módulo II
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

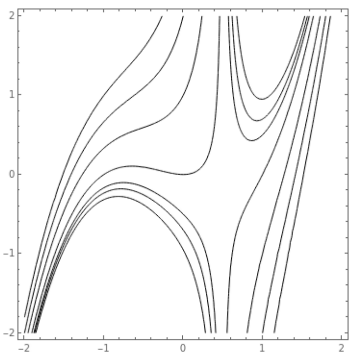
8 de febrero de 2021

50 1. Se considera la función $f(x,y) = x^4 - x^2 - 2xy + y^2 + 1$.

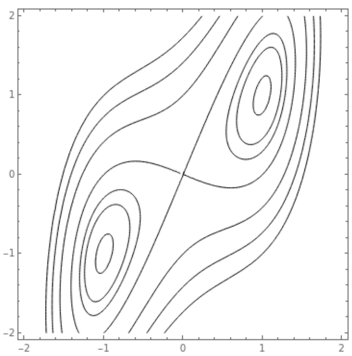
20 *a*) Hallar los puntos críticos de f y clasificarlos.

15 *b*) Sabiendo que una de las siguientes figuras representa curvas de nivel para la función f, indicar cuál justificando la respuesta.

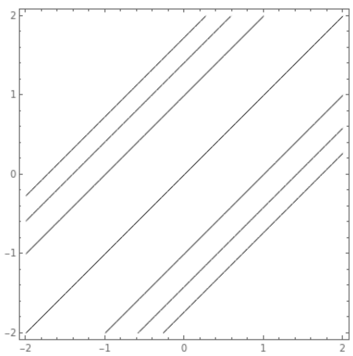
A



B



C



15 *c*) Hallar máximo y mínimo absoluto de f en el tríangulo de vértices $(-2,0)$, $(2,0)$ y $(2,4)$.

50 2. Consideremos la región D del plano dada por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2, \ y \geq |x|\}.$$

15 *a*) Representar gráficamente la región.

15 *b*) Expresar D utilizando coordenadas polares.

20 *c*) Calcular

$$\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy.$$

(*Sugerencia: cambiar a coordenadas polares.*)

Solución

1. *a*)

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2x - 2y, 2y - 2x).$$

Si ponemos $f(x,y) = 0$, de la segunda coordenada tenemos que debe ser $y = x$, y sustituyendo esto en la primera nos queda $x^3 - x = 0$, de donde $x = 0, \pm 1$.

Así que los puntos críticos son $\boxed{(0,0),\ (-1,-1), \text{y } (1,1)}$. La hessiana de f en un punto genérico es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

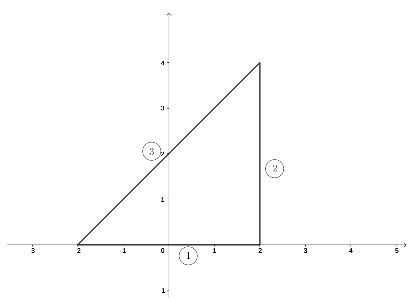
Entonces

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to (0,0) \text{ es punto silla, y}$$

$$Hf(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \text{en } (\pm 1, \pm 1) \text{ hay mínimos relativos.}$$

b) La figura B es la que representa las curvas de nivel de la función f pues es la única que presenta un punto silla en $(0,0)$ (además, se puede ver que hay extremos relativos en $(-1,-1)$ y $(1,1)$ porque alrededor de esos puntos las curvas de nivel son curvas cerradas.)

c) El triángulo es



① $y = 0,\ -2 \le x \le 2$
② $x = 2,\ 0 \le y \le 4$
③ $y = x + 2\ \ -1 \le x \le 2$

El único punto crítico en el interior del triángulo es $(1,1)$ y $f(1,1) = 0$.

Ahora analizamos el borde:

① $f(x,0) = x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow f(x,0)' = 2x(2x^2 - 1)$ se anula en $x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y los tres puntos están en el lado del triángulo. $f(0,0) = 1,\ f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{3}{4}$.

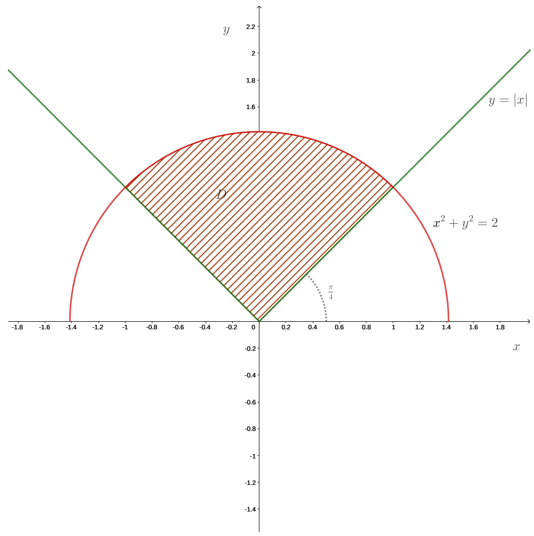
② $f(2,y) = y^2 - 4y + 13 \Rightarrow f(2,y)' = 2y - 4$ se anula en $y = 2$ que es un punto sobre el lado. $f(2,2) = 9$.

③ $f(x, x+2) = x^4 - 2x^2 + 5 \Rightarrow f(x, x+2)' = 4x(x^2 - 1)$ se anula en $x = 0, \pm 1$ y los tres puntos están sobre el lado. $f(0,2) = 5,\ f(-1,1) = f(1,3) = 4$.

Por último, debemos evaluar en los vértices: $f(-2,0) = f(2,0) = f(2,4) = 13$.

Por lo tanto, el $\boxed{\text{máximo absoluto es } 13}$ y el $\boxed{\text{mínimo absoluto es } 0}$.

2. *a*) El conjunto es



b) $D = \{(r, \theta) \ : \ 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi\}$

c)

$$\int_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dxd = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\cancel{r} \operatorname{sen}\theta}{\cancel{r^2}} \cancel{r} dr = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\sqrt{2}\cos\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$= -\sqrt{2}(\cos\tfrac{3}{4}\pi - \cos\tfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2.$$