Examen de Matemática II, módulo 2,
07/02/2022.

El examen dura dos horas. El mínimo para aprobar es de 50 puntos.

1. (**60 puntos**)
   Se considera la función $f(x, y) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + y^2 - 2y$.

   a) Hallar los puntos estacionarios y clasificarlos.

   b) Hallar el máximo y mínimo absolutos de f en $D = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$.

2. (**40 puntos**)
   Sea T el triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta de ecuación $x - y = 1$.

   a) Dibujar T y hallar las coordenadas de sus vértices.

   b) Calcular $\iint_T e^{y-x}\, dxdy$.

Nota: *en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. *a*) Es

$$f_x(x,y) = 6x^2 - 18x + 12 = 6\left(x^2 - 3x + 2\right) = 6(x-1)(x-2), \qquad f_y(x,y) = 2y - 2 = 2(y-1).$$

Luego los puntos estacionarios son $(1,1)$ y $(2,1)$. Las derivadas segundas son

$$f_{xx}(x,y) = 12x - 18, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 2.$$

Luego

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que f tiene un punto de silla en $(1,1)$ y un mínimo relativo en $(2,1)$.

b) Restringiendo f a las rectas del borde obtenemos

$$\begin{aligned}
&\alpha(y) = f(0,y) = y^2 - 2y \quad \Rightarrow \quad \alpha'(y) = 2y - 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,1);\\
&\beta(y) = f(2,y) = 4 + y^2 - 2y \quad \Rightarrow \quad \beta'(y) = 2y - 2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (2,1);\\
&\gamma(x) = f(x,0) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \quad \Rightarrow \quad \gamma'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \quad \Rightarrow \quad (1,0),\ (2,0);\\
&\delta(x) = f(x,1) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1 \quad \Rightarrow \quad \delta'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \quad \Rightarrow \quad (1,1),\ (2,1).
\end{aligned}$$

Notar que los vértices y los puntos estacionarios están entre los anteriores. Evaluando f en esos puntos obtenemos

$$f(0,0) = 0, \quad f(0,1) = -1, \quad f(1,0) = 5, \quad f(1,1) = 4, \quad f(2,0) = 4, \quad f(2,1) = 3.$$

Luego f tiene un mínimo absoluto en $(0,1)$ y un máximo absoluto en $(1,0)$.

2. *a*) Los vértices son $(0,0)$, $(0,-1)$ y $(1,0)$.

b)

$$\begin{aligned}
\iint_T e^{y-x}\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x-1}^0 e^{y-x}\,dy\right) dx = \int_0^1 e^{-x}\left(\int_{x-1}^0 e^y\,dy\right) dx = \int_0^1 e^{-x}\left(e^y\Big|_{x-1}^0\right) dx\\
&= \int_0^1 e^{-x}\left(1 - e^{x-1}\right) dx = \int_0^1 e^{-x} - e^{-1}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^1 - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}.
\end{aligned}$$