Matemática 2 - módulo II
Curso 2020

Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Examen

19 de julio de 2021

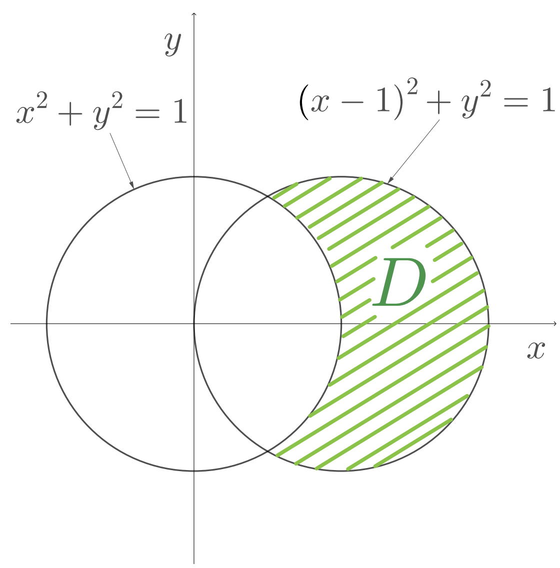
1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2.$$

   a) Hallar los puntos críticos de f y clasificarlos.

   b) Hallar máximo y mínimo absolutos de f en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,2)$ y $(2,0)$.

2. Se considera el siguiente subconjunto D del plano:



   a) Expresar el conjunto utilizando coordenadas polares.

   b) Calcular

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$$

   (*Datos útiles:* $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\int \cos^3(\theta)\, d\theta = \frac{1}{3}(2+\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta + C$).

Solución

1. *a)* $\nabla f(x,y) = (3(x^2-1), 4y(y^2-1))$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \longrightarrow \boxed{x=\pm 1} \\ y(y^2-1)=0 \longrightarrow \boxed{y=\pm 1},\ \boxed{y=0} \end{cases}$$

En conclusión, todos los posibles puntos críticos son:

$$\boxed{\textbf{Puntos críticos: } \boxed{(-1,-1), \quad (-1,0), \quad (-1,1), \quad (1,-1) \quad (1,0) \quad (1,1)}}$$

La hessiana de f está dada por

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en los puntos críticos tenemos:

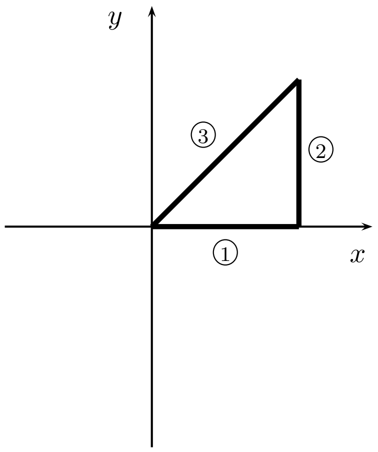
$$Hf(-1,\pm 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene puntos silla en } (-1,\pm 1)}$$

$$Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene un máximo relativo en } (-1,0)}$$

$$Hf(1,\pm 1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene mínimos relativos en } (1,\pm 1)}$$

$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene punto silla en } (1,0)}$$

b)



Borde:
① $y=0 \Rightarrow f(x,0) = x^3 - 3x$.
Derivando con respecto a x nos queda

$$f(x,0)' = 3x^2 - 3,$$

que se anula solamente en $x=1$ ya que debe ser $0 \leq x \leq 2$.

② $x=2 \Rightarrow f(2,y) = 2 + y^4 - 2y^2$.
Derivando con respecto a y nos queda

$$f(2,y)' = 4y^3 - 4y = 4y(y^2-1),$$

que se anula para $y = 0, 1$ ya que $0 \leq y \leq 2$.

③ $x=y \Rightarrow f(x,x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$. Derivando con respecto a x nos queda

$x = 1$ es raíz, bajando por Ruffini

$f(x,x)' = 4x^3+3x^2-4x-3 = 4(x-1)(x+1)(x+\frac{3}{4})$,

	4	3	-4	-3
1		4	7	3
	4	7	3	0

que se anula en $x = 1$ ya que $0 \leq x \leq 2$.

las otras raíces serán entonces

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = -\frac{3}{4}, -1.$

Interior: No hay ningún punto crítico en el interior del triángulo.
Candidatos: $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$.
Evaluamos en los candidatos:

$$f(0,0) = 0, \quad f(2,0) = 2, \quad f(2,2) = 10, \quad f(1,0) = -2, \quad f(1,1) = -3, \quad f(2,1) = 1$$

Por lo tanto

$$\boxed{\text{máximo} = 10} \ \boxed{\text{mínimo} = -3}$$

2. *a)* $D = \{(x,y) \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \leq x^2 + y^2\}$.
$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 = r^2 - 2r\cos\theta + 1.$
Entonces, en coordenadas polares

$$D = \{(r,\theta) \ : \ 1 \leq r \leq 2\cos\theta\}.$$

b)

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} r^2\,dr = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{r^3}{3}\Big|_1^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3\theta\,d\theta =$$
$$= \frac{8}{9}(2+\cos^2\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{2\sqrt{3}}.$$