Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 2

Examen. *19/07/2022*

El examen dura dos horas. El mínimo para aprobar es de 50 puntos.

1. (**40 puntos**) Hallar la recta que mejor aproxime la siguiente tabla de datos

x	y
0	-1
1	7
2	3
3	7

2. (**40 puntos**)
Se considera la función $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy \log(x)$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0\}$.

   a) Hallar las derivadas parciales de f.

   b) Calcular la derivada direccional de f en el punto $p = (e, 1)$ respecto a la dirección del versor $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. En lo anterior, $e = 2,7128\cdots$ es el número de Euler.

   c) Hallar los puntos estacionarios de f y clasificarlos.

3. (**20 puntos**) Calcular $\iint_I xy\, e^{x^2} e^{y^2}\, dxdy$, siendo $I = [0, 1] \times [0, 1]$.
Sugerencia: si tienen que calcular $\int ye^{y^2}\, dy$, puede servir el cambio de variable $z = y^2$.

Nota: *en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. La tabla de datos es

	x	y	x^2	xy
	0	-1	0	0
	1	7	1	7
	2	3	4	6
	3	7	9	21
$\sum$	6	16	14	34

Luego hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} 14a + 6b &= 34 \\ 6a + 4b &= 16 \end{cases}$$

cuya solución es $a = 2$ y $b = 1$. Entonces la recta es $y = 2x + 1$.

2. *a*) $f_x(x, y) = y\big(\log(x) + 1\big)$ y $f_y(x, y) = x\log(x)$.

   b) Es $\nabla_p f = (e, 2)$. Luego $D_w f(p) = e \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{e+2}{\sqrt{2}}$.

   c) El único punto estacionario es $(1, 0)$. Las derivadas segundas son

$$f_{xx}(x, y) = \frac{y}{x}, \quad f_{xy}(x, y) = \log(x) + 1, \quad f_{yy}(x, y) = 0.$$

   La matriz hessiana de f en $(1, 0)$ es $H = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Luego $\det(H) = -1$ y por lo tanto f tiene un punto de silla en $(1, 0)$.

3.

$$\iint_I xye^{x^2}e^{y^2}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xye^{x^2}e^{y^2}\,dy\right) dx = \int_0^1 xe^{x^2}\left(\int_0^1 ye^{y^2}\,dy\right) dx = \int_0^1 xe^{x^2}\left(\frac{e^{y^2}}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=1}\right) dx$$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}\left(\frac{e-1}{2}\right) dx = \left(\frac{e-1}{2}\right)\int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left(\frac{e-1}{2}\right)^2.$$