Matemática 2 - módulo II | **Universidad de la República**
Curso 2020 | **Facultad de Ciencias**
Centro de Matemática

Examen

1 de marzo de 2021

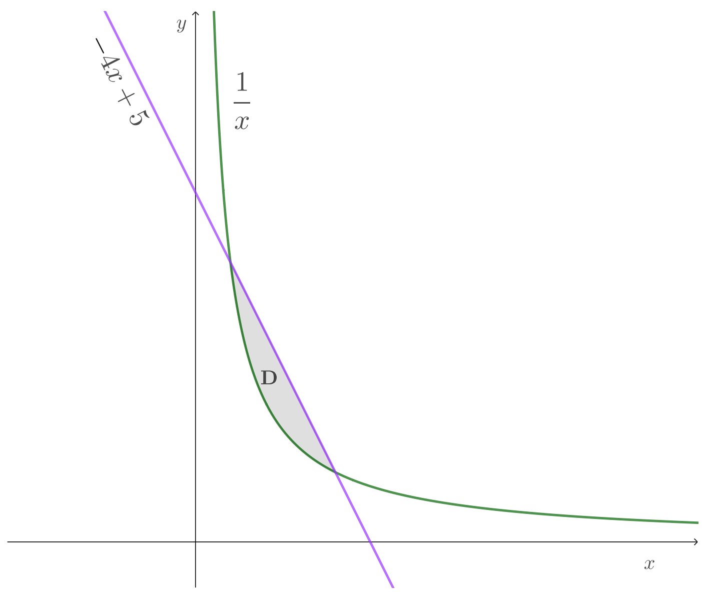
50 1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2-1} - x^2.$$

25 *a*) Hallar los puntos críticos de f y clasificarlos.[*]

25 *b*) Calcular máximo y mínimo absolutos de f en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,2)$ y $(2,-2)$.

50 2. Se consideran el conjunto D que se muestra sombreado en la siguiente figura:



y la función $f(x,y) = \dfrac{4x-5}{3y^2}$.

10 *a*) Escribir D en coordenadas (cartesianas).

20 *b*) Determinar el dominio de f y esbozar las curvas de nivel.

20 *c*) Calcular

$$\int_D f(x,y)\,dxdy.$$

---

[*]Se recuerda que $e \approx 2,72$ y $e^{-1} \approx 0,37$.

Solución

1. *a*) $\nabla f(x,y) = (2xe^{x^2-y^2-1} - 2x, -2ye^{x^2-y^2-1})$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x(e^{x^2-y^2-1} - 1) = 0 \\ -2ye^{x^2-y^2-1} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{e^{x^2-y^2-1} = 1} \qquad \boxed{y = 0}$$

Poniendo $y = 0$ en la ecuación $e^{x^2-y^2-1} = 1$ nos queda $e^{x^2-1} = 1$, y entonces debemos tener $x^2 - 1 = 0$ y por lo tanto $\boxed{x = \pm 1}$. En conclusión, todos los posibles puntos críticos son:

$$\boxed{\textbf{Puntos críticos: } \boxed{(0,0), \quad (-1,0), \quad (1,0)}}$$

La hessiana de f está dada por

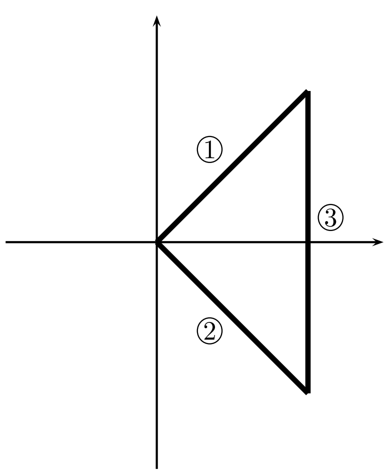
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (4x^2+2)e^{x^2-y^2-1} - 2 & -4xye^{x^2-y^2-1} \\ -4xye^{x^2-y^2-1} & (4y^2-2)e^{x^2-y^2-1} \end{pmatrix}.$$

Evaluando en los puntos críticos tenemos:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2(e^{-1}-1) & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene un máximo en } (0,0)}$$

$$Hf(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{(\pm 1, 0) \text{ son puntos silla de } f}$$

b)



Borde:
① y ② $y = \pm x \Rightarrow f(x, \pm x) = e^{-1} - x^2$.
Derivando con respecto a x nos queda

$$f(x, \pm x)' = -2x,$$

que se anula solamente en $x = 0$ lo cual corresponde a un vértice.

③ $x = 2 \Rightarrow f(2,y) = e^{3-y^2} - 4$.
Derivando con respecto a y nos queda

$$f(2,y)' = -2ye^{3-y^2},$$

que se anula en $y = 0$.

Interior: El punto crítico $(1,0)$ está en el interior del triángulo.

Candidatos: $(0,0)$, $(2,2)$, $(2,-2)$, $(2,0)$, $(1,0)$.

Evaluamos en los candidatos:

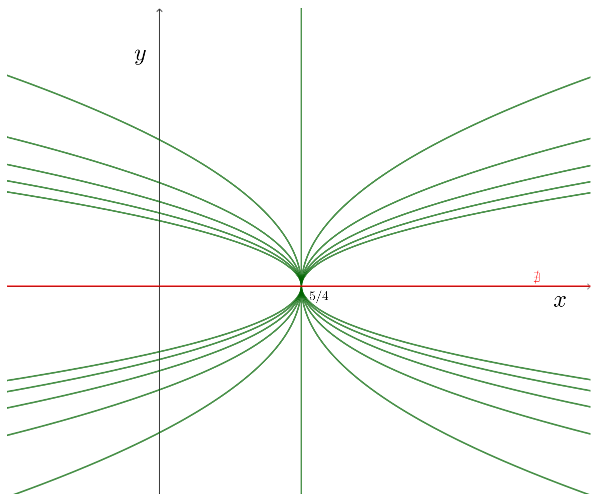
$$f(0,0) = e^{-1} < 1, \quad f(2,\pm 2) = e^{-1} - 4 < 0, \quad f(2,0) = e^{3} - 4 > 1, \quad f(1,0) = 0$$

Por lo tanto

$$\boxed{\text{máximo} = e^{3} - 4}\ \boxed{\text{mínimo} = e^{-1} - 4}$$

2. *a*) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{x} \leq y \leq -4x+5, \ x \geq 0\}$.

   b) $\text{Dom}(f) = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \neq 0)\}$. La curva de nivel c está dada por la ecuación $\frac{4x-5}{3y^2} = k$, despejando x nos queda $x = \frac{3}{4}ky^2 + \frac{5}{4}$ por lo que para $k \neq 0$ son parábolas horizontales y para $k = 0$ una recta vertical.



   c)

$$\int_D \frac{4x-5}{3y^2}\,dxdy = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{1} dx \int_{\frac{1}{x}}^{-4x+5} \frac{4x-5}{y^2} dy = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{1} -\frac{4x-5}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{-4x+5} dx == \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{1} 4x^2 - 5x + 1\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 1 - \frac{1}{48} + \frac{5}{32} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \boxed{-\frac{3}{32}}$$