Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Práctico 5

1. Representar los siguientes conjuntos como regiones del plano:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1,\, y \in [0, 2]\}$;
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2x + y < 1,\, 0 < x - 2y < 1\}$;
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0,\, x + y < 1\}$;
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y,\, 0 < x - y,\, 1 > y - 2x,\, 1 > y + 2x\}$;
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 4\}$;
   f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\, x > 0,\, y < 1\}$;
   g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > x,\, y \in [0, 1]\}$;
   h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2x > 1,\, x + y > 5,\, -x + y < 5\}$;
   i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0,\, x - y > 0,\, x < 1\}$;
   j) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1,\, y - 2x < 1,\, 2y - x > 1\}$;
   k) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + 2x > 1,\, x^2 + y^2 < 4\}$.

2. Calcular las integrales iteradas que se indican y representar gráficamente la región de integración.

   a) $\displaystyle\int_1^4 dy \int_2^5 dx$ *b)* $\displaystyle\int_1^4 dy \int_2^5 x^2 - y^2\, dx$ *c)* $\displaystyle\int_1^4 dy \int_2^5 x^2 + xy + y\, dx$

   d) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_1^{x^2} x^2 + y^2\, dy$ *e)* $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 + 2xy - 3y^3\, dy$ *f)* $\displaystyle\int_1^2 dy \int_y^{4y} \frac{1}{x}\, dx$

3. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de f en ciertos conjuntos. Dibujar esos conjuntos y expresar las integrales iteradas en el orden inverso de integración.

   a) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-1}^1 f(x, y)\, dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y)\, dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y)\, dx$

   d) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y)\, dy$ *e)* $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-y}^{y^2} f(x, y)\, dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dx$

   g) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy$ *h)* $\displaystyle\int_1^e dx \int_0^{\log(x)} f(x, y)\, dy$

4. **Áreas**.

   a) Calcular el área del cuadrilátero de vértices $(0, 0)$; $(1, 1)$; $(3, 2)$; $(5, 4)$.
   b) Calcular el área del paralelogramo A, de vértices $(-2/3, -1/3)$, $(2/3, 1/3)$, $(4/3, -1/3)$ y $(0, -1)$, de las siguientes tres maneras:
      (1) usando la fórmula del área de un paralelogramo,
      (2) calculando la integral que corresponda,

(3) haciendo un cambio de variables del tipo

$$u = ax + by + m, \quad v = cx + dy + n, \quad \text{con} \quad a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0,$$

que transforme A en el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.

5. Supongamos que se tiene una lámina plana L cuya densidad de masa en cada punto es $\mu(x,y)$, entonces la masa total de ésta es $\displaystyle\int_L \mu(x,y)\,dxdy$.

   Encuentra la masa de láminas delimitadas por las curvas dadas y cuyas densidades (expresadas en kg por metro cuadrado) son las que se indican (la unidad de medida para las regiones es el metro cuadrado).

   a) $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 2;\ \mu(x,y) = 2x$.
   b) $y = 0,\ y = 1,\ x = y,\ x = y^2;\ \mu(x,y) = 2x$.
   c) $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1;\ \mu(x,y) = x^2 + y^2$.

6. En cada caso, calcular la integral que se indica.

   a) $\displaystyle\int_Q x^2 + y\,dxdy$; $Q = [0,1] \times [0,1]$.
   b) $\displaystyle\int_Q x^2 + y^2\,dxdy$; $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
   c) $\displaystyle\int_Q x^2 + 4y^2\,dxdy$; $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 4\}$.
   d) $\displaystyle\int_Q e^{-x^2-y^2}\,dxdy$; $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
   e) $\displaystyle\int_Q \sin(x) + \cos(y)\,dxdy$; $Q = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   f) $\displaystyle\int_Q x + y\,dxdy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$.
   g) $\displaystyle\int_Q \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dxdy$; $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y, x^2 + y^2 > 1, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$.

7. **Más áreas**.

   a) Calcular el área del círculo de radio r.
   b) Calcular el área de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $a, b > 0$.