Funciones de varias variables

En Matemática 1 se consideraron funciones que dependen de una variable. En este curso vamos a considerar funciones que dependen de más de una variable (principalmente de dos).

Algunos ejemplos.

1) Altura sobre el nivel del mar.

Es una cantidad que depende de la latitud y la longitud.

Esta función asigna un número a cada punto de la superficie terrestre.

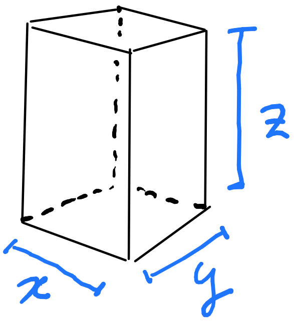
2). En un gas ideal se tiene

$$\underbrace{P}_{\text{presión}}\,\underbrace{V}_{\text{volumen}} = \underbrace{k}_{\text{constante}}\,\underbrace{T}_{\text{temperatura}}$$

Podemos escribir por ejemplo la presión como función del volumen y la temperatura:

$$P = \frac{kT}{V}.$$

3) El volumen encerrado por un paralelepípedo (por ej. una caja de cartón) es función del ancho, el largo y el alto:



volumen $= xyz$.

Es una función que depende de tres variables.

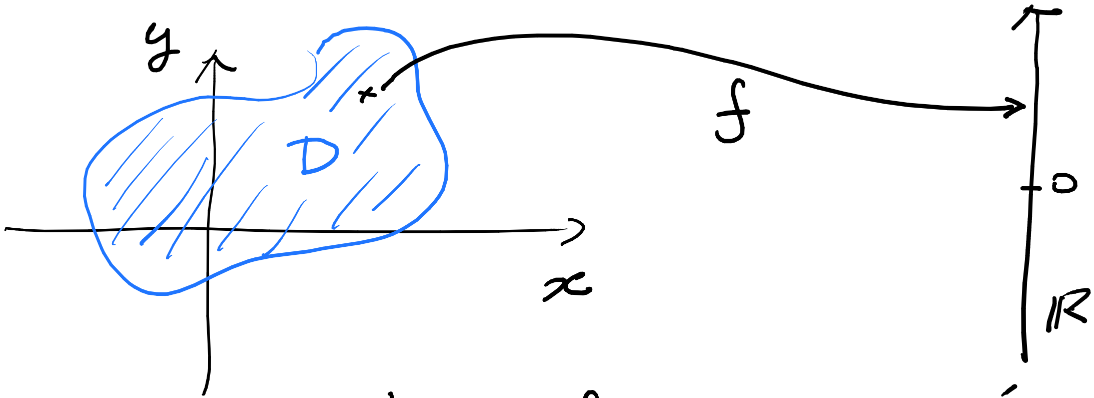
Definición: Una función escalar f de dos variables asigna a cada punto (x,y) de un subconjunto D del plano $\mathbb{R}^2$ un número que denotamos por $f(x,y)$.

Dominio: El conjunto donde está definida la función

Rango o imagen: El conjunto de todos los valores que toma.

Escribimos $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

La imagen la denotamos por $f(D)$.



punto en el plano $\longrightarrow$ número real.

Ejemplos:

1. Altura sobre el nivel del mar.

$$x = \text{latitud} \in [-\pi, \pi]$$
$$y = \text{longitud} \in [0, 2\pi)$$

$$D = \{ (x,y) \ : \ -\pi \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y < 2\pi \} =$$
$$= [-\pi, \pi] \times [0, 2\pi)$$

$h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ¡No tenemos una fórmula!

2. Función lineal.

$D = \mathbb{R}^2$ $\qquad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = ax + by + c$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes.

Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$ el rango es todo $\mathbb{R}$.

Conjuntos en el plano:

- **Rectángulos**: $R = I \times J$

  I, J intervalos en $\mathbb{R}$

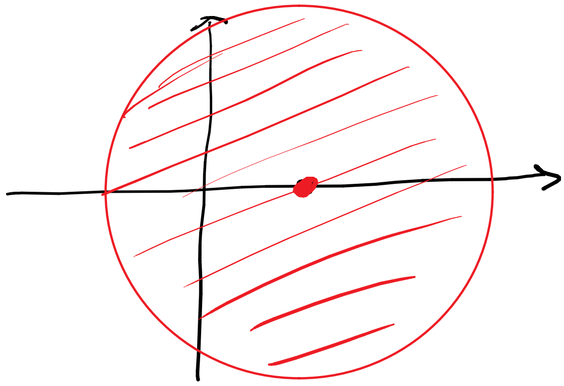
  Por ejemplo $I = [0,1]$, $J = (-1,2]$

  $$I \times J = [0,1] \times (-1,2] = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, -1 < y \leq 2\}$$

- **Discos**: Son conjuntos encerrados por circunferencias.

  $$D = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$

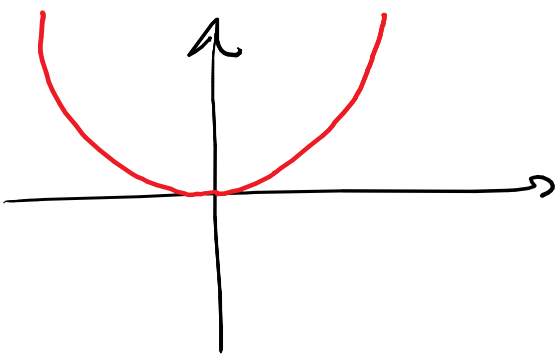
  es un disco



- **Curvas**: Por ejemplo gráficos de funciones de una variable.

  $$C = \{(x,y) : y = x^2\}$$

  es una curva.



- Otros ejemplos

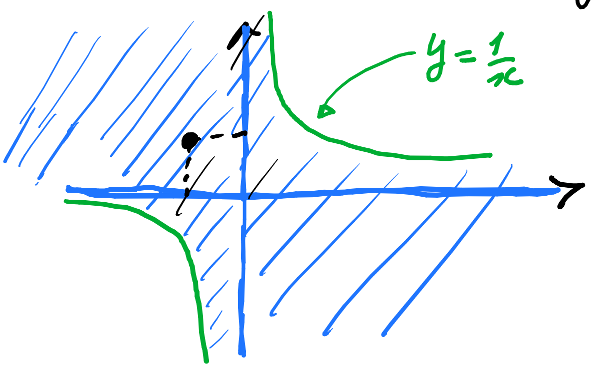
— $D = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\} = [-1,1] \times [-1,1]$

$-1 \leq x \leq 1$ $\qquad$ $-1 \leq y \leq 1$

— $D = \{(x,y) : xy < 1\}$

$x \neq 0 \longrightarrow$ $y < \frac{1}{x}$ si $x > 0$

$y > \frac{1}{x}$ si $x < 0$



Por ejemplo $(-1,1) \in D$

$(-1) \times 1 = -1 < 1$

Más funciones:

1. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 y)$

tiene sentido para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

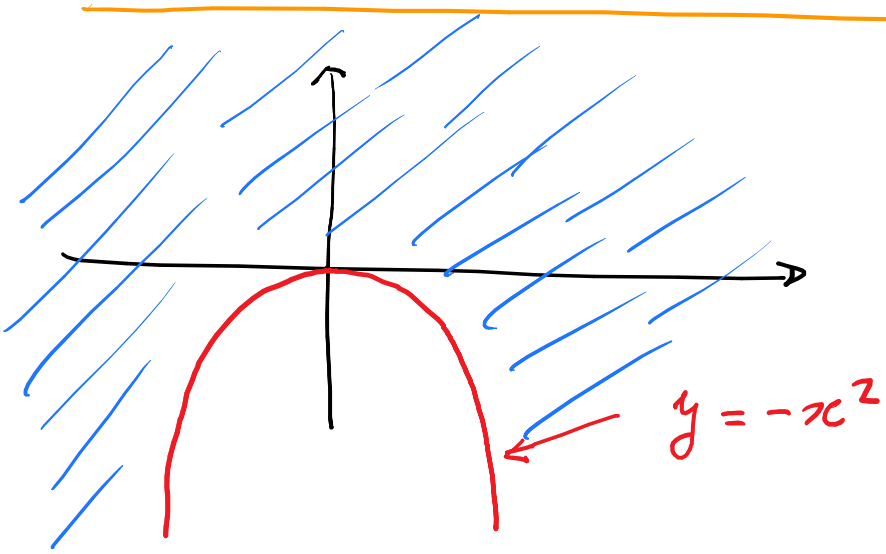
$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Dominio} = \mathbb{R}^2}$

Por otro lado $-1 \leq \operatorname{sen}(x^2 y) \leq 1$ y todos los valores en ese intervalo son alcanzados $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Rango} = [-1,1]}$

2. $f(x,y) = \log(x^2+y)$

tiene sentido siempre que $x^2+y>0$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Dominio} = \{(x,y) : \ y > -x^2\}}$



x^2+y toma todos los valores posibles en $\mathbb{R}^+$ (basta poner $x=0$) y log toma todos los valores posibles en $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Rango} = \mathbb{R}}$

3. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Esto quiere decir todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ excepto $(0,0)$.

tiene sentido siempre que $x^2+y^2 \neq 0$, es decir, si $(x,y) \neq (0,0)$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Dominio} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

Rango ?

No es tan fácil de ver.

Pero observemos que

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$$

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy$$

Como $(x+y)^2 \geq 0$, $(x-y)^2 \geq 0$

se deduce que

$$-\frac{1}{2} \leq \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{= f(x,y)} \leq \frac{1}{2}$$

Notar que $f(1,1) = \frac{1 \cdot 1}{1^2+1^2} = \frac{1}{2}$

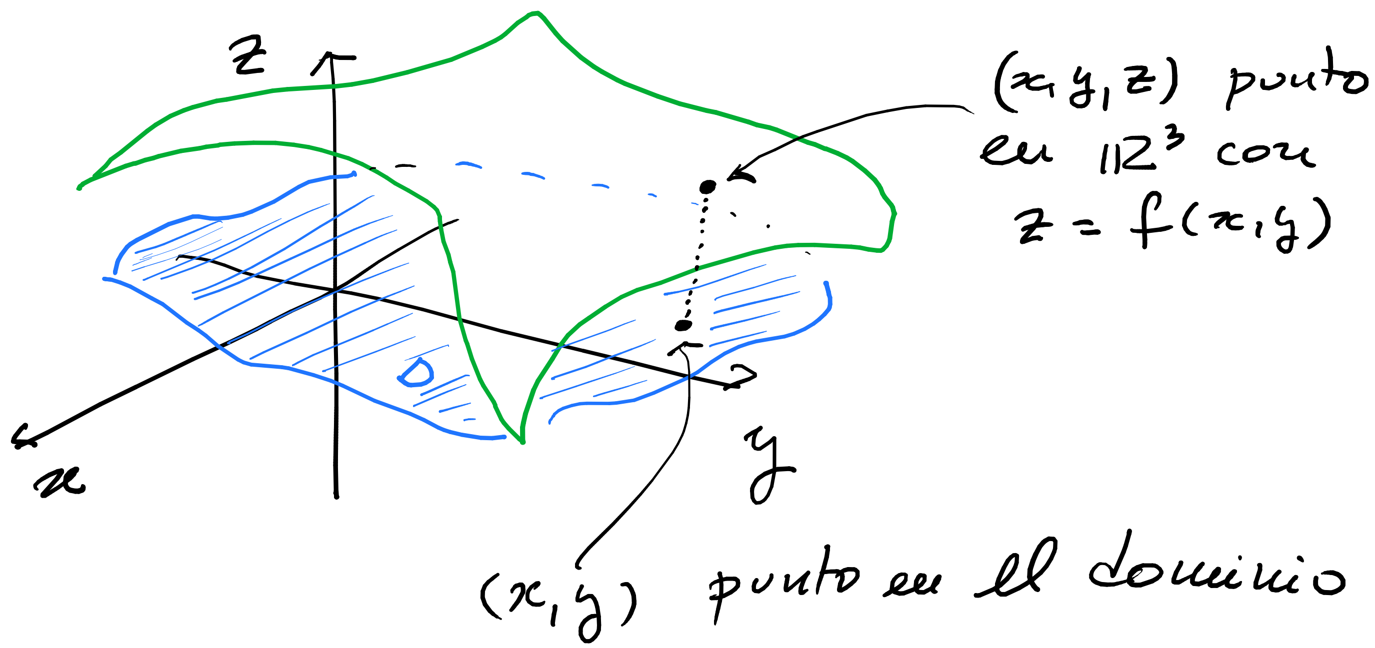
y $f(-1,1) = \frac{-1 \cdot 1}{(-1)^2+1^2} = -\frac{1}{2}$

Todos los valores en el intervalo son alcanzados

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{Rango} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}$

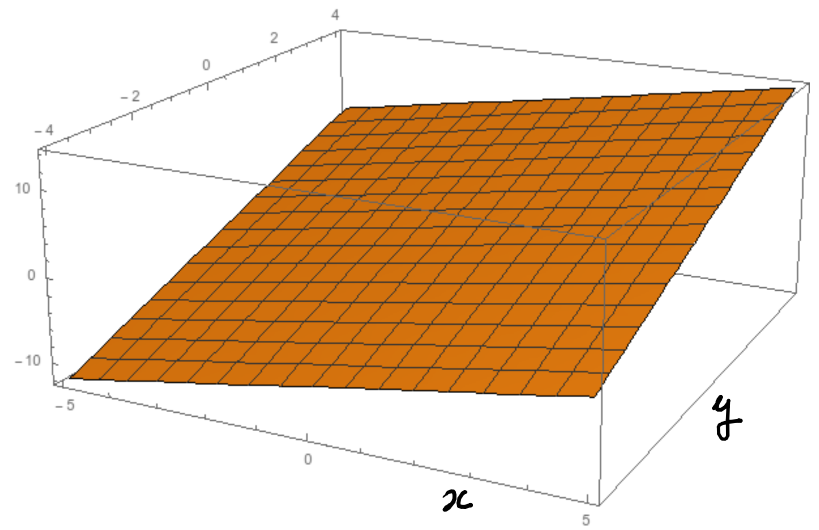
Gráficos.

La representación gráfica de una función de dos variables no es tan sencilla, necesitamos representarla en $\mathbb{R}^3$. ¡Al menos es complicado hacerlo a mano!

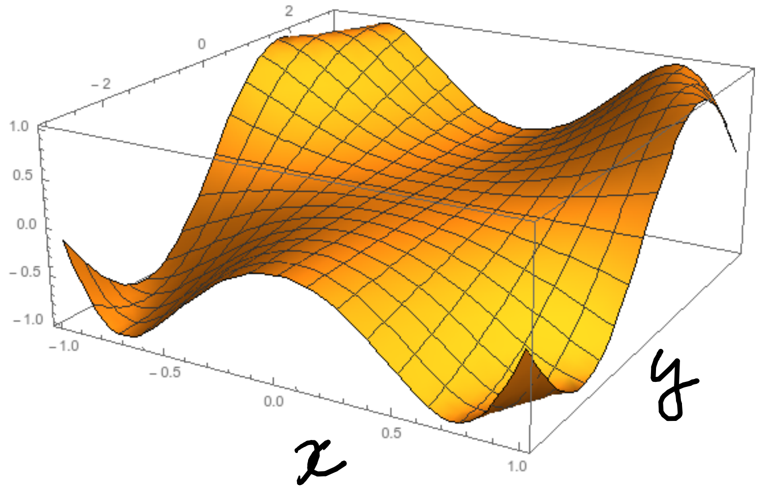


Ejemplos:

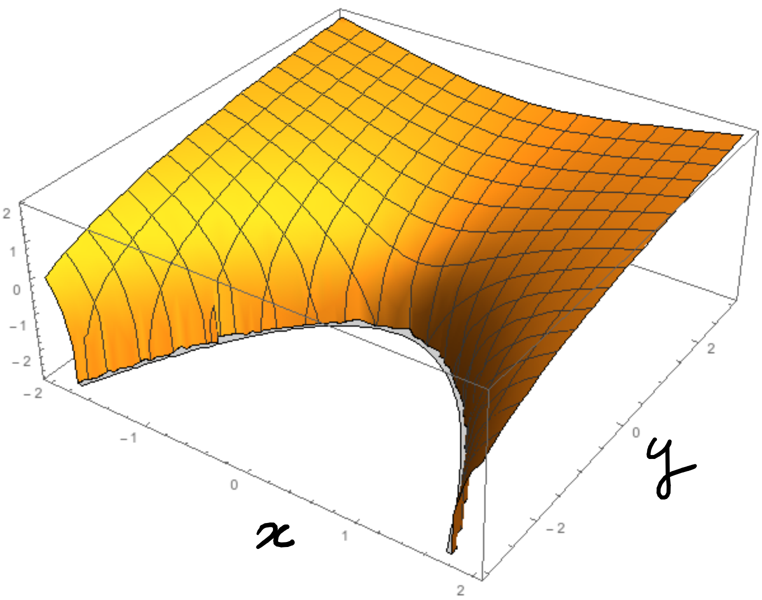
1. $f(x,y) = x+2y+1$



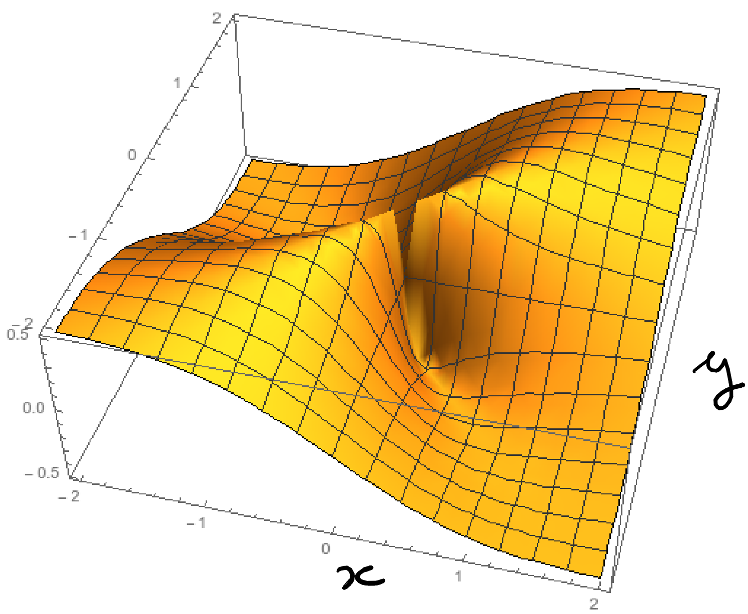
2. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 y)$



3. $f(x,y) = \log(x^2 + y)$



4. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$



En el origen pasa algo raro.

Curvas de nivel

Son representaciones gráficas que nos ayudan a entender el comportamiento de una función.

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$, el "conjunto de nivel k" de f es

$$C(k) = \{ (x,y) \in D : f(x,y) = k \}$$

= los puntos del dominio donde la función vale k.

También escribimos $C(k) = f^{-1}(k) =$ = "preimágenes de k".

En general $C(k)$ no es una curva. Pero si f está dada por una fórmula y no es la función constante, $C(k)$ va a ser una (o varias) curvas.

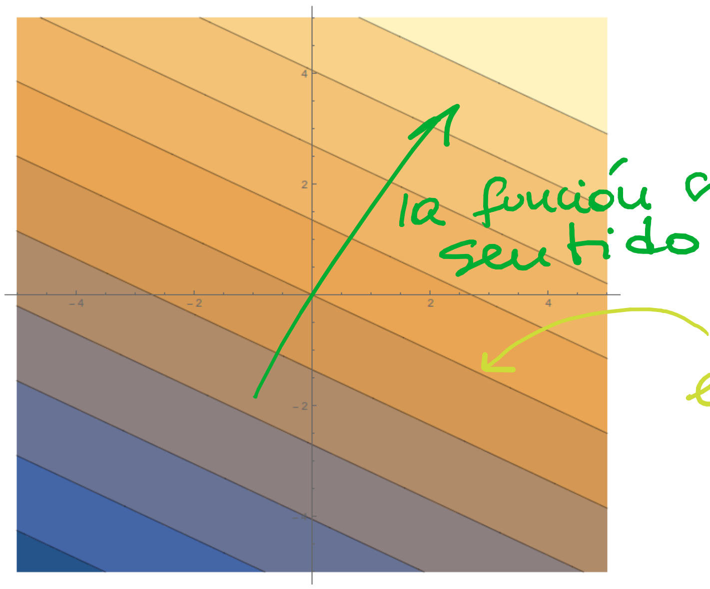
Ejemplo. Tomemos $f(x,y) = x+2y$.

$D = \mathbb{R}^2$.

$$C(k) = \{ (x,y) : \underbrace{x+2y=k}_{\text{Una ecuación lineal de dos variables}} \}$$

$\Rightarrow C(k)$ es una recta.

Si graficamos $C(k)$ para diferentes $\underbrace{\text{valores de } k}_{\text{equiespaciados}}$ tenemos:



En Meteorología: Isotermas

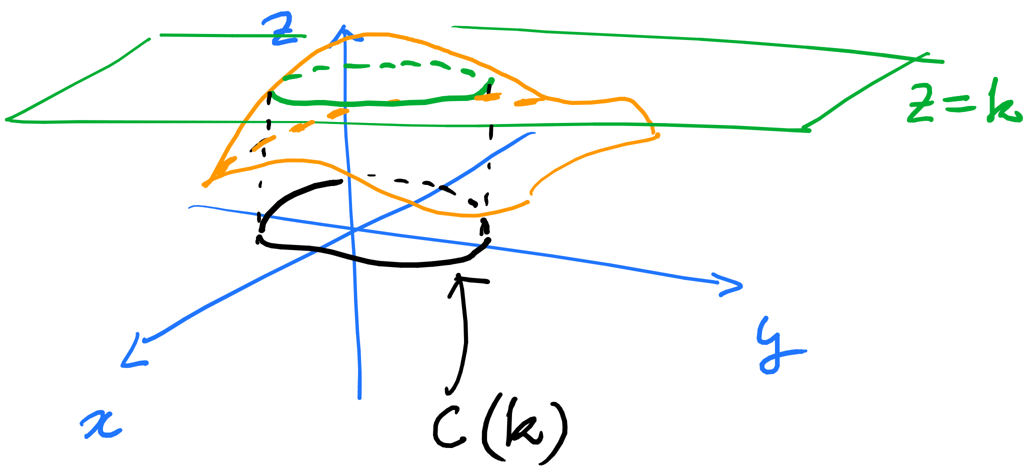
Puntos sobre la superficie terrestre que tienen la misma temperatura.

En Física: Equipotenciales

Puntos donde la función potencial vale lo mismo (eléctrico, gravitatorio, etc).

$\boxed{\text{Geométricamente}}$:

$C(k)$ se obtiene intersectando el plano $z=k$ con el gráfico de f y proyectando sobre el plano xy.



$\boxed{\text{Curvas de nivel}} \longrightarrow \boxed{\text{idea del crecimiento de la función}}$

Si graficamos curvas de nivel para diferentes valores de k equiespaciados tenemos :

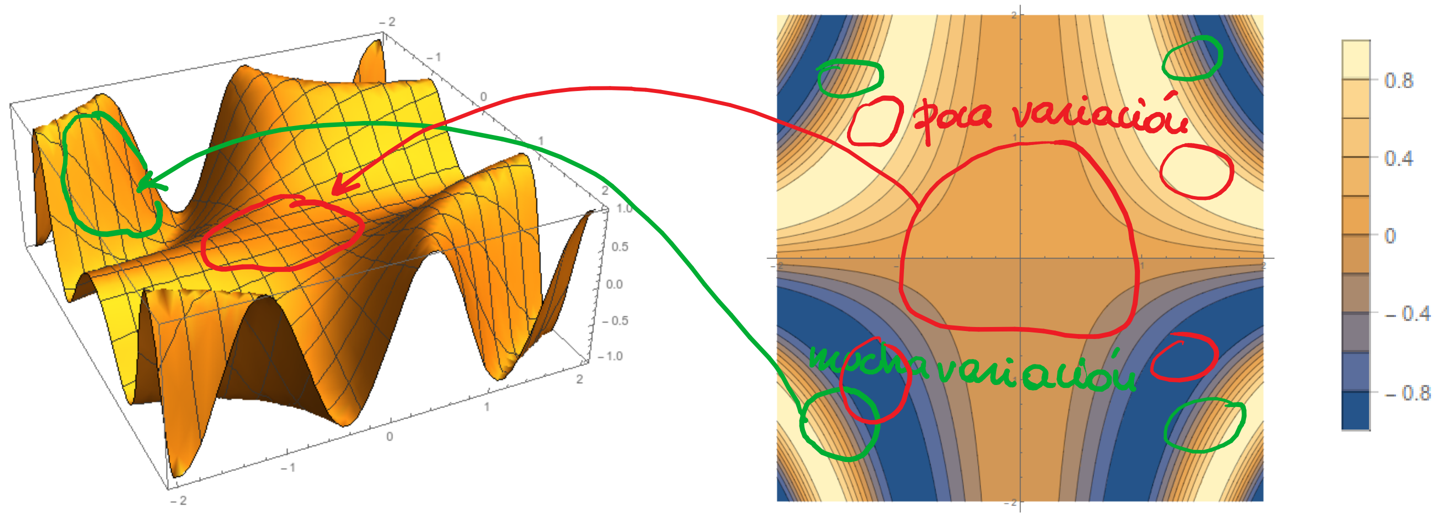
lugar donde las curvas de nivel están muy juntos $\Big\}$ → la función varía rápidamente

lugar donde las curvas de nivel están muy separadas $\Big\}$ → La función varía lentamente

Ejemplos: Veamos las curvas de nivel para las funciones del video anterior.

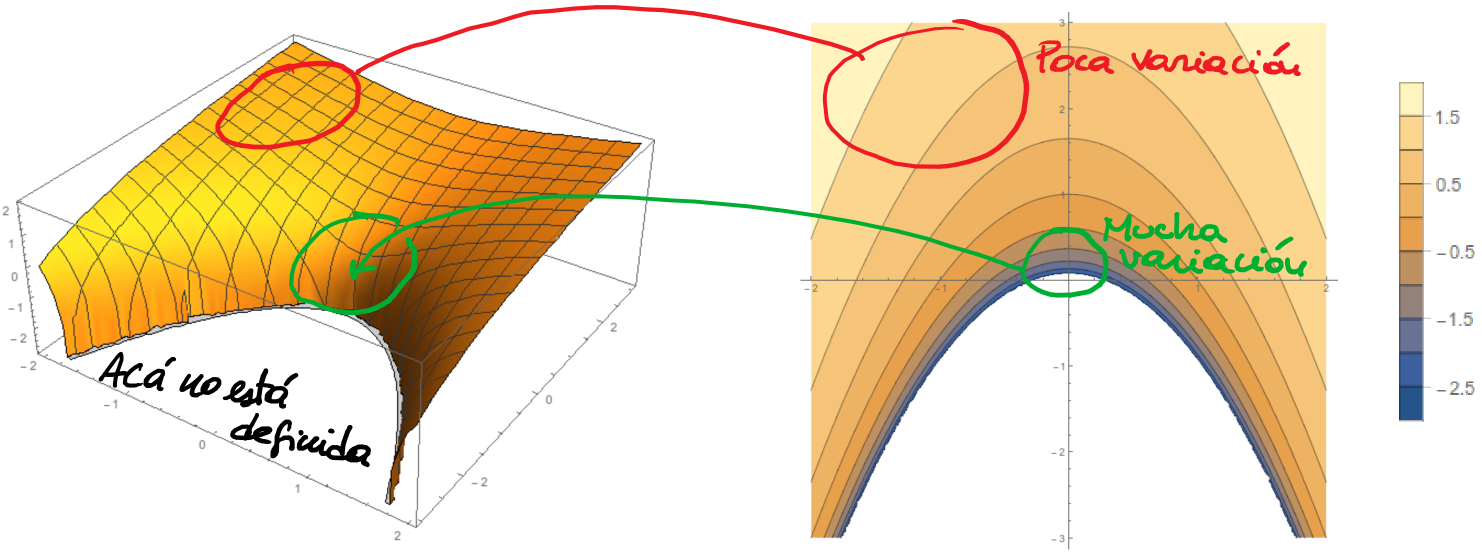
$$\boxed{\operatorname{Sen}(x^2 y)}$$

Gráfica | Curvas de nivel



$$\boxed{\log(x^2+y)}$$

Gráfica | Curvas de nivel



$$\boxed{\frac{x\,y}{x^2+y^2}}$$

Gráfica

Curvas de nivel

Poca variación

mucha variación