ALN 2022
27/9
Clase 10

Dado un problema computacional con input $\mathcal{I}$, output $\mathcal{O}$ y un mapa solución $S: \mathcal{I} \to \mathcal{O}$ (o al menos localmente definido) que asumimos de clase C^1, el nº de condición asociado al input $a \in \mathcal{I}$ se define como

$$\operatorname{cond}(S, a) = \| DS(a) \|_{op}. \qquad (*)$$

Comentarios:

1) El nº de condición mide la sensibilidad (en primer orden) del output respecto a pequeñas perturbaciones en el input.

2) La definición $(*)$ a veces se denomina nº de condición absoluto.

3) Muchas veces queremos normalizar el nº de condición para que represente el error relativo (tanto en el input como en el output). En este sentido se define el nº de condición relativo como:

$$\operatorname{cond}_{rel}(S, a) = \frac{\| DS(a) \|}{\| S(a) \|} \cdot \| a \| \qquad (a \neq 0.)$$

4) Se puede extender la definición a funciones Lipschitz de la siguiente manera

$$\operatorname{cond}(S, a) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\|\Delta a\| \leq \delta} \frac{\| S(a+\Delta a) - S(a) \|}{\| \Delta a \|}$$

Observar que el condicionamiento relativo asociado es

$$\operatorname{cond}_{rel}(S, a) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\|\Delta a\| \leq \delta} \frac{\| S(a+\Delta a) - S(a) \|}{\| S(a) \|} \cdot \frac{\| a \|}{\| \Delta a \|}$$

Ejemplos:

1) Supongamos que queremos obtener la mitad de un nº complejo. El mapa a mirar es $S:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$, $S(a)=\frac{a}{2}$.
Luego $\|S'(a)\|=\frac{1}{2}$, y en particular su nº de cond. relativo

$$\text{cond}_{rel}\left(\tfrac{1}{2}\cdot,a\right)=\frac{\|S'(a)\|}{\|S(a)\|}\cdot\|a\|=\frac{\frac{1}{2}}{\left|\frac{a}{2}\right|}\cdot|a|=1.$$

Por lo tanto el problema está bien condicionado.

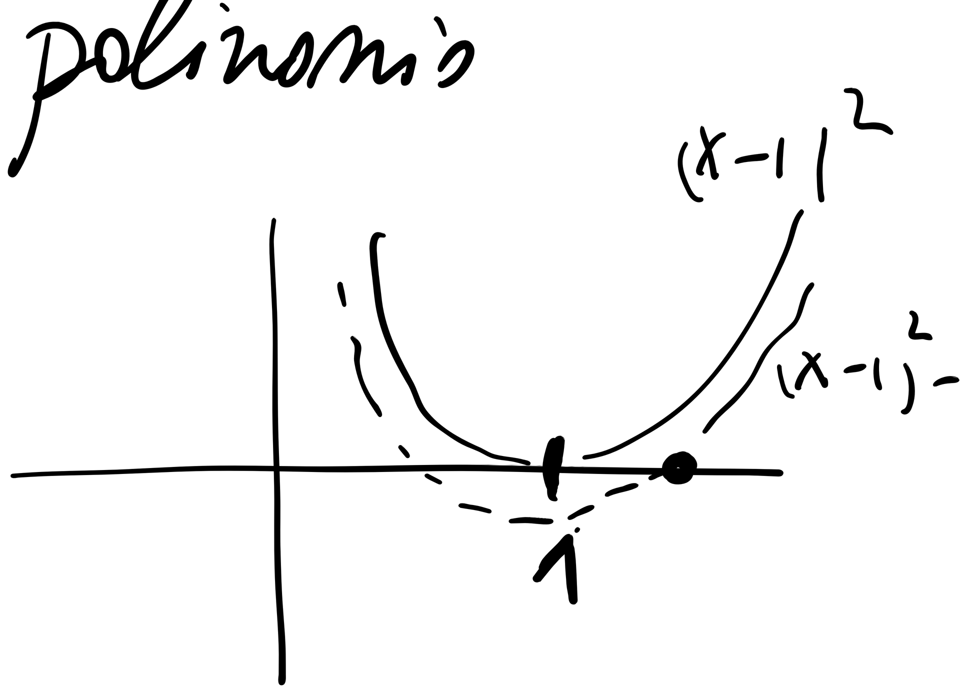
2) (Raíz cuadrada) $S:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ $S(a)=\sqrt{a}$

Luego $S'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$ y por lo tanto $\text{cond}_{rel}(\sqrt{\cdot},a)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}\cdot a=\frac{1}{2}$

y por lo tanto sigue estando bien condicionado. (Observar que la normalización mata la singularidad.)

3) ~~Como~~ (Raíces de Polinomios) Consideremos el polinomio

$(X-1)^2$ que tiene raíz 1 (doble)

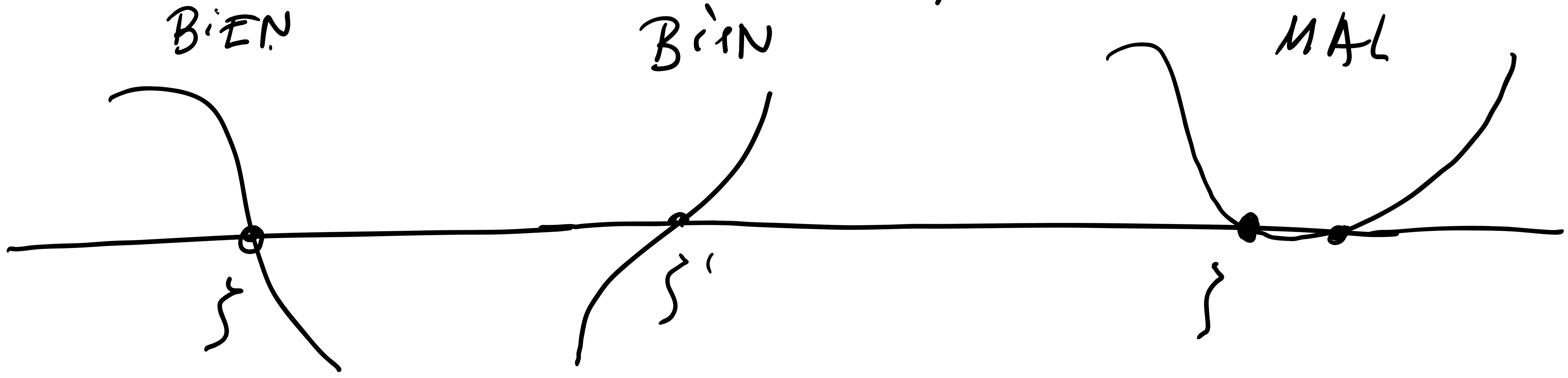


Una pequeña perturbación en los coeficientes puede hacer "disparar" la raíz.
Por ejemplo si ~~se~~ resto $\varepsilon>0$ al polinomio $(X-1)^2-\varepsilon$ tiene a $1+\sqrt{\varepsilon}$ como raíz $\left(((X-1)-\sqrt{\varepsilon})((X-1)+\sqrt{\varepsilon})=(X-1)^2-\varepsilon\right)$ y por lo tanto una perturbación de orden ε produce una perturbación de orden $\sqrt{\varepsilon}$ que es mucho más grande.

En particular $\delta'((x-1)^2) \overset{\circledast}{=} +\infty$ y por lo tanto el nº de condición (y el relativo) vale ∞.

$\circledast$ Acá abusamos el lenguaje dado que solo derivamos δ : polinomios $\to \mathbb{C}$ en la dirección del término independiente.

En general, el problema de ~~solución~~ raíces de polinomios ($p(\xi)=0$) está bien condicionado cuando $p'(\xi) \neq 0$ (y lejos de 0), y está mal condicionado cuando $p'(\xi) \simeq 0$



4) Polinomio de Wilkinson

$$P(x) = \prod_{i=1}^{20} (x-i) = (x-1)(x-2) \cdots (x-20)$$
$$= a_0 + a_1 x + \cdots + a_{19} x^{19} + x^{20}.$$

¿Cómo calculan el nº de condición?

Por ejemplo, ¿cómo se comporta la raíz 15 cuando perturbamos los coeficientes?

Veamos primero a pedal: supongamos que perturbamos el coeficiente a_j del polinomio
$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_j\xi^j + \cdots + a_n\xi^n = 0$
con ξ raíz. Por ejemplo cambiamos a_j por $(a_j + t)$ y derivamos todo respecto a t. Esto es, tenemos una raíz ξ_t cercana a ξ que satisface

$a_0 + a_1\xi_t + a_2\xi_t^2 + \cdots + (a_j+t)\xi_t^j + \cdots + a_n\xi_t^n = 0$, y luego derivando

Obtenemos (escribiendo $\mathring{\xi} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \xi_t$, con $\xi_0 = \xi$)

$$\underbrace{a_1}\mathring{\xi} + \underbrace{2a_2\xi}\mathring{\xi} + \underbrace{3a_3\xi^2}\mathring{\xi} + \cdots + \underbrace{ja_j\xi^{j-1}}\mathring{\xi} + [\xi^j] + \cdots + \underbrace{na_n\xi^{n-1}}\mathring{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad p'(\xi)\mathring{\xi} + \xi^j = 0 \quad \text{siendo } p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

y por lo tanto $\mathring{\xi} = -\xi^j / p'(\xi)$.

Por lo tanto la perturbación infinitesimal de la raíz ξ, dada la perturbación del coeficiente a_j está dada por $\left|\frac{\xi^j}{p'(\xi)}\right|$.

Si queremos el condicionamiento relativo se tiene

$$\text{cond}_{\text{re}}\left(p, \xi; \text{"respecto a perturbación en coeficiente } a_j\text{"}\right) = \left|\frac{\xi^j}{p'(\xi)}\right| \frac{|a_j|}{\underset{\text{"}\delta(p)}{|\xi|}}$$

Luego en el caso del polinomio de Wilkinson tenemos que perturbación del coef a_{15} ~~provoca~~ resulta en condicionamiento

$$\frac{15^{15} \cdot a_{15}}{p'(15)\cdot 15} = \frac{15^{14} \cdot \overset{= 1.67\times 10^{9}}{a_{15}}}{5!\,14!} \simeq 5.1 \times 10^{13}.$$

Que es un nº gigante. Veamos algunas simulaciones para ver el comportamiento de la raíz 15 respecto a pequeñas perturbaciones en los coeficientes.

(Ver notebook).