Repartido 4. Aplicaciones simples: Spin 1/2 y Oscilador armónico 1D

1. Matrices de Pauli

Las matrices de Pauli son las tres matrices complejas:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Son hermíticas, de traza nula y determinante -1:

$$\sigma_a^\dagger = \sigma_a \qquad \mathrm{tr}(\sigma_a) = 0 \qquad \det \sigma_a = -1, \qquad (a = 1, 2, 3)$$

Las matrices de Pauli cumplen las relaciones de conmutación y anticonmutación siguientes:

$$\begin{aligned} [\sigma_a, \sigma_b] &= 2i\epsilon_{abc}\sigma_c \qquad\qquad (a, b, c = 1, 2, 3) \\ \{\sigma_a, \sigma_b\} &= 2\delta_{ab} I \end{aligned}$$

a) Deduzca las relaciones: $\sigma_a\sigma_b = i\epsilon_{abc}\sigma_c + \delta_{ab}I$ y $(\sigma_a)^2 = I$.

b) Muestre que:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\sigma_a) &= 0 \\ \mathrm{tr}(\sigma_a\sigma_b) &= 2\delta_{ab} \\ \mathrm{tr}(\sigma_a\sigma_b\sigma_c) &= 2i\epsilon_{abc} \end{aligned}$$

c) Sea $\vec{\sigma}$ el *vector de matrices* $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera, demuestre que:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})I + i(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{\sigma}$$

d) Si $\vec{u} = u\,\hat{n}$ es un vector cualquiera en la dirección $\hat{n}$, muestre que:

$$e^{i\vec{u}\cdot\vec{\sigma}} = \cos(u)I + i\,\mathrm{sen}(u)\,(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})$$

e) Pruebe que el conjunto LI $\{\sigma_0 = I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ es una base para las matrices 2×2. Esto es, toda matriz $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ puede ser escrita de la siguiente manera:

$$M = \sum_{a=0}^{3} m_a \sigma_a \qquad \text{con: } m_a = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M\sigma_a)$$

2. Considere una partícula de spin 1/2 de momento magnético $\vec{M} = g\vec{S}$. El espacio de estados de spin se escribe en la base de autovectores de S_z $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ con autovalores $\pm\hbar/2$.

En el instante $t = 0$ el estado del sistema es $|\psi(0)\rangle = |+\rangle$.

a) Si se mide el observable S_x a tiempo $t = 0$, ¿Qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidades?

b) Si en vez de hacer la medida anterior, dejamos que el sistema evolucione bajo la influencia de un campo magnético paralelo al eje Oy: $\vec{B} = B_0\hat{y}$, calcular en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ el estado del sistema a tiempo t.

c) En ese instante t se miden S_x, S_y y S_z. ¿Qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidades? ¿Qué relación debe existir entre B_0 y t para que el resultado de alguna de las medidas se conozca con certeza? Dar una interpretación física de esta condición.

3. Considere una partícula de spin 1/2, y la notación del ejercicio anterior.

a) Supongamos que a timpo $t = 0$ se mide S_y y se obtiene $+\hbar/2$ ¿Cuál es el vector de estado del sistema inmediatamente después de esta medida?

b) Inmediatemente después de la medida anterior, aplicamos un campo magnético uniforme paralelo al eje Oz y dependiente del tiempo. El hamiltoniano del spin es entonces
$H(t) = \omega_0(t)\ S_z$.
Asumimos que $\omega_0(t)$ es cero para $t < 0$ y $t > T$ y que crece linealmente con t desde 0 a ω_0 para el intervalo $0 < t < T$ (T es un parámetro con dimension de tiempo).
Mostrar que a tiempo t el estado del sistema se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{i\theta(t)}|+\rangle + ie^{-i\theta(t)}|-\rangle]$$

donde $\theta(t)$ es una función real de t, que debe calcular.

c) En un instante $t = \tau > T$ medimos S_y ¿Qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidades? Determine la relación que debe existir entre ω_0 y T para que tengamos certeza del resultado. Interprete físicamente.

4. Considere un oscilador armónico unidimensional de masa m y frecuencia ω.

a) Escriba la función de onda del estado fundamental en la representación de posición $\varphi_0(x) = \langle x|\varphi_0\rangle$ y en la de momento $\overline{\varphi}_0(p) = \langle p|\varphi_0\rangle$.

b) Observe que en este estado se tiene $\sigma_x\,\sigma_p = \frac{\hbar}{2}$ (¿por qué?). Obtenga las dispersiones σ_x y σ_p.

c) Escriba la energía del estado fundamental $E_0 = \langle\varphi_0|H|\varphi_0\rangle = \frac{\langle P^2\rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\langle X^2\rangle$ en términos de σ_x y σ_p y muestre que $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$.

d) Partiendo de $\varphi_0(x)$ y usando la relación entre autoestados de energía mediante operadores de bajada (a) y subida ($a^\dagger$), obtenga las funciones de onda normalizadas $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$. Grafique y compare las amplitudes de las cuatro funciones de onda halladas.

5. Una partícula está en el estado base de un oscilador armónico unidimensional con frecuencia ω cuando repentinamente la constante elástica k se cuadruplica, de modo que: $\omega' = 2\omega$, sin cambiar la función de onda.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una medida de la energía retorne el valor $\hbar\omega/2$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una medida de la energía retorne el valor $\hbar\omega$?

6. Considere un oscilador unidimensional de masa m y frecuencia angular ω. En $t = 0$, el estado de este oscilador está dado por:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle$$

donde los estados $|\varphi_n\rangle$ son estacionarios con energías $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$.

a) ¿Cuál es la probabilidad P de que una medida de la energía del oscilador, hecha en un tiempo arbitrario $t > 0$, de un resultado mayor que $2\hbar\omega$? Cuando $P = 0$, ¿cuáles son los coeficientes c_n distintos de 0?

Asuma ahora que sólo c_0 y c_1 son distintos de 0:

b) Escriba la condición de normalización para $|\psi(0)\rangle$ y el valor medio $\langle H\rangle$ de la energía en términos de c_0 y c_1. Con la condición adicional $\langle H\rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_0|^2$ y $|c_1|^2$.

c) Como el ket $|\psi(0)\rangle$ está definido salvo por una constante global de fase, se fija este factor eligiendo c_0 real y positiva, y asumiendo que:

$$\langle H\rangle = \hbar\omega \qquad \text{y} \qquad \langle X\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Si se escribe $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$, calcule θ_1.

d) Con $|\psi(0)\rangle$ así determinado, escriba $|\psi(t)\rangle$ para $t > 0$ y calcule el valor de θ_1 en t. Deduzca el valor medio $\langle X\rangle(t)$ de la posición en t.

7. Un oscilador armónico unidimensional está compuesto por una partícula de masa m y carga eléctrica q en un potencial $V = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2$. La partícula se encuentra inmersa en un campo eléctrico $E(t)$ paralelo a Ox, de modo que a V se le debe agregar la energía potencial $W(t) = -qE(t)X$.

a) Escriba el hamiltoniano $H(t)$ de la partícula en términos de los operadores a y $a^\dagger$. Calcule los conmutadores de a y $a^\dagger$ con $H(t)$.

b) Sea $\alpha(t) = \langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle$, con $|\psi(t)\rangle$ el vector de estado normalizado de la partícula. Muestre que $\alpha(t)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega\alpha(t) + i\lambda(t) \qquad \text{con :} \qquad \lambda(t) = \frac{q}{\sqrt{2m\hbar\omega}}E(t)$$

Integre esta ecuación diferencial. En el instante t, ¿cuáles son los valores medios de la posición y el momento de la partícula?

c) Se define el ket $|\varphi(t)\rangle$ por: $|\varphi(t)\rangle = [a - \alpha(t)]\,|\psi(t)\rangle$. Usando los resultados de a) y b) muestre que la evolución de $|\varphi(t)\rangle$ está dada por:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = [H(t) + \hbar\omega]\,|\varphi(t)\rangle$$

¿Cómo varía la norma de $|\varphi(t)\rangle$ con el tiempo?

d) Asuma que $|\psi(0)\rangle$ es un estado propio de a con valor propio $\alpha(0)$, muestre que $|\psi(t)\rangle$ también es un estado propio de a y calcule el valor propio. Halle en tiempo t el valor medio del hamiltoniano del oscilador armónico: $H_0 = H(t) - W(t)$ como función de $\alpha(t)$. Calcule ΔX, ΔP y ΔH_0.

e) Asuma que en $t = 0$ el oscilador está en el estado base $|\varphi_0\rangle$. El campo eléctrico actua en $[0, T]$ y luego cae a 0. Cuando $t > T$, ¿cuál es la evolución de los valores medios $\langle X\rangle(t)$ y $\langle P\rangle(t)$?

Aplicación: si entre 0 y T el campo eléctrico es $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$, discuta el fenómeno observado de *resonancia* en términos de $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$. Si en $t > T$ se mide la energía, ¿qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidades?